MATEMÁTICA – 9º ANO
5ª SEMANA - 2º CORTE

Superintendência de Educação Infantil e Ensino Fundamental | Secretaria de Estado da Educação | Somos todos GOIÁS

Tema / Conhecimento: Funções: representações numérica, algébrica e gráfica: Função do 2° Grau / Função do 1° Grau: gráfico/Função do 2° Grau: gráfico /Cálculo de máximos ou de mínimos

Habilidade: (EF09MA06-G) Estabelecer o valor de máximo ou de mínimo de uma função quadrática, através do cálculo das coordenadas do vértice da parábola associada no plano cartesiano, para resolver problemas significativos como determinar o custo mínimo para a confecção de uma certa quantidade de produtos, encontrar a altura máxima obtida por um objeto lançado verticalmente para cima, entre outros.

NOME:	DATA:
UNIDADE ESCOLAR:	

Função Quadrática: Uma aplicação f de R em R recebe o nome de função quadrática ou do 2º grau quando associa a cada $x \in$ R o elemento ($ax^2 + bx + c$) $\in \mathbb{R}$, em que a, b e c são números reais dados e a diferente de 0.

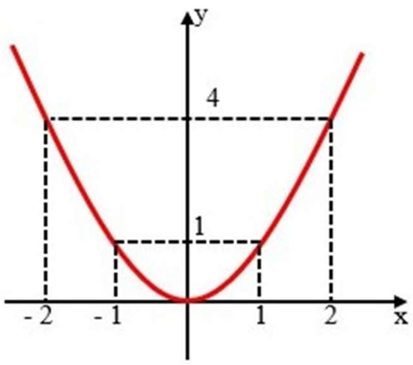
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Exemplos de funções quadráticas:

a) $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$
b) $f(x) = x^2 - 2x - 5$
c) $f(x) = -3x^2 + 5x$
d) $f(x) = x^2 - 4$
e) $f(x) = 2x^2$
f) $f(x) = x^2$

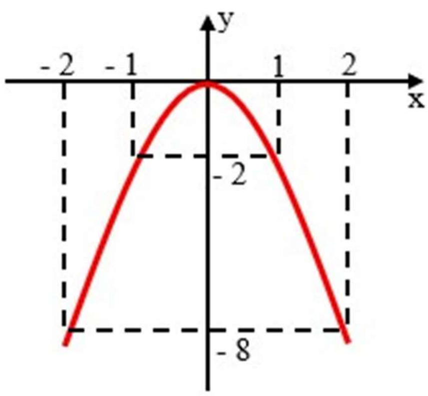
Gráfico: O gráfico da função quadrática é uma parábola. Vamos construir o gráfico da função $f(x) = x^2$

x	$f(x) = x^2$
-2	$(-2)^2 = 4$
-1	$(-1)^2 = 1$
0	$(0)^2 = 0$
1	$(1)^2 = 1$
2	$(2)^2 = 4$



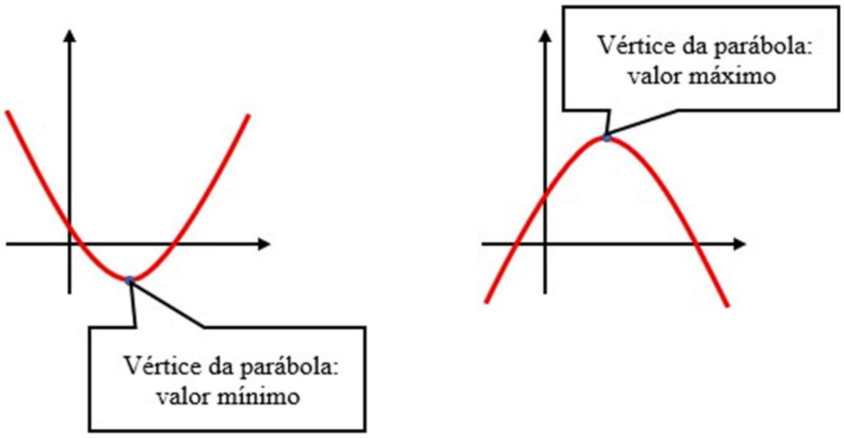
Agora vamos construir o gráfico da função $f(x) = -2x^2$

x	$f(x) = -2x^2$
-2	$-2(-2)^2 = -8$
-1	$-2(-1)^2 = -2$
0	$-2(0)^2 = 0$
1	$-2(1)^2 = -2$
2	$-2(2)^2 = -8$



Perceba que o gráfico da função $f(x) = x^2$ possui a concavidade voltada para cima e o gráfico da função $f(x) = -2x^2$ possui a concavidade voltada para baixo. Quem determina essa concavidade é o valor do coeficiente que multiplica x^2. Se esse número for positivo, concavidade voltada para cima e se for negativo, concavidade voltada para baixo.

Coordenadas do vértice: O vértice da parábola é o ponto onde a parábola troca o seu ramo, e vamos representá-lo por (V). Os pontos mínimo e de máximo são calculados pelas coordenadas do vértice.



Para determinarmos os valores de x e y do vértice utilizaremos as seguintes fórmulas,

$$x_v = -\frac{b}{2a} \qquad\qquad y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

Portanto o vértice é dado pelas coordenadas,

$$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

Exemplo 01. Determine as coordenadas do vértice da parábola definida pela função $y = x^2 - 2x - 5$.
Resolução:
1º passo: Identificar os coeficientes
a = 1
b = - 2
c = - 5
2º passo: Calcular o x do vértice.

$$x_v = -\frac{b}{2a} \to x_v = -\frac{(-2)}{2 \cdot 1} \to x_v = \frac{2}{2} \to x_v = 1$$

3º passo: Calcular o y do vértice.

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} \to y_v = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \to y_v = -\frac{(-2)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-5)}{4 \cdot 1} \to y_v = -\frac{24}{4} \to y_v = -6$$

4º passo: Escrever as coordenadas do vértice.

$$V(1, -6)$$

Exemplo 02. A dona de uma loja observou que o lucro (L) de sua loja dependia da quantidade de clientes (c) que frequentava o mesmo diariamente. Um matemático analisando a situação estabeleceu a seguinte função:

$L(c) = -c^2 + 60c - 500$

Qual seria o número de clientes necessário para que a dona da loja obtivesse o lucro máximo em seu estabelecimento?

(A) 28
(B) 29
(C) 30
(D) 32
(E) 34

Resolução: Perceba que o exercício pede para determinar a quantidade de clientes para que o lucro seja máximo. Note ainda que o ***c*** está representando o ***x*** e ***L(c)*** está representando o *y*. Basta calcularmos o x do vértice.

$$x_v = -\frac{b}{2a} \rightarrow x_v = -\frac{(60)}{2 \cdot (-1)} \rightarrow x_v = \frac{60}{2} \rightarrow x_v = 30$$

Logo, o número de clientes necessário para que a dona da loja obtenha o lucro máximo em seu estabelecimento é igual a 30.

Quer saber mais sobre função quadrática? Se possível, assista aos vídeos:
https://youtu.be/1cqNdPSB_nY?list=PLEfwqyY2ox878_BhtQEeE1fajo7AJUBdZ e
https://youtu.be/iAKFxIXT6K8

ATIVIDADES

01 - A respeito da função $f(x) = -4x^2 + 100$, determine o resultado da soma entre as coordenadas x e y do vértice.

02 - A equação da trajetória parabólica do salto de uma pulga é dada por $f(x) = -x^2 + 4x$. Essa pulga salta no ponto de origem do sistema de coordenadas cartesianas. Qual é, em decímetros, a altura máxima atingida pela pulga?

03 – Dada a função $T(h) = -h^2 + 22h - 85$, em que h representa as horas do dia e T a temperatura. Calcule a temperatura máxima.

04 - Em uma empresa, o número de unidades diárias vendidas, x dias após o lançamento de um produto, pode ser modelado pela fórmula $y = -x^2 + 60x + 100$, em que $x = 0$ é o dia do lançamento. Após atingir o maior número de unidades vendidas desse produto em um único dia, a fórmula deixa de ser válida e o número de produtos vendidos a cada dia começa a diminuir até que o produto deixa de ser vendido. Determine o número de dias, incluindo o dia do lançamento, até que o produto atinja o maior número de unidades diárias vendidas.

05 - Uma indústria produz *x* unidades por dia de um determinado produto que é vendido em sua totalidade a um preço de R$ 80,00 a unidade. O custo total para a produção diária de *x* unidades é igual a $C(x) = x^2 + 20x + 500$.

Para que a indústria tenha um lucro diário *L* máximo, qual deve ser o número de unidades produzidas e vendidas por dia?

06 - Uma bola é lançada verticalmente para cima, a partir do solo, tem sua altura h (em metros) expressa em função do tempo t (em segundos), decorrido após o lançamento, pela lei $h(t) = 80t - 10t^2$. Determine a altura máxima atingida pela bola.

07 – Determine o valor máximo da função $y = 50t - 0{,}25t^2$

08 - Uma pequena fábrica vende seus bonés em pacotes com quantidades de unidades variáveis. O lucro obtido é dado pela expressão $L(x) = -x^2 + 12x - 20$, onde x representa a quantidade de bonés contidos no pacote. A empresa pretende fazer um único tipo de empacotamento, obtendo um lucro máximo. Determine quantos bonés dever ser empacotados para que o lucro seja máximo.