9º ANO	Superintendência de Educação Infantil e Ensino Fundamental · Secretaria de Estado da Educação
MATEMÁTICA	

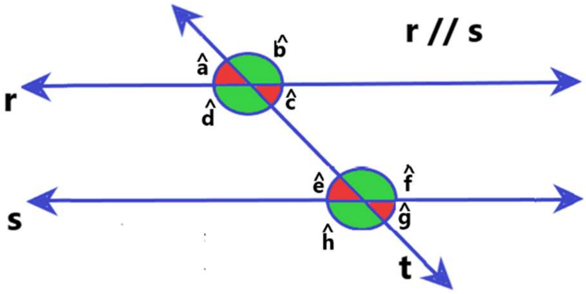
ATIVIDADE 8

Tema: Demonstrações de relações entre os ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma transversal; Relações métricas no triângulo retângulo; Teorema de Pitágoras: verificações experimentais, demonstração e aplicações; Teorema de Tales e Teoremas de proporcionalidade.

NOME:

UNIDADE ESCOLAR:

ÂNGULOS FORMADOS POR DUAS RETAS PARALELAS CORTADA POR UMA



Perceba que a interseção da reta t com as retas paralelas r e s deu origem aos ângulos $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$, $\hat{d}$, $\hat{e}$, $\hat{f}$, $\hat{g}$ e $\hat{h}$.

A classificação entre esses ângulos é dada em função de sua posição em relação às paralelas e em relação à reta transversal.

O que são ângulos Opostos Pelo Vértice?

Dizemos que dois ângulos são opostos pelo vértice (OPV), se forem formados pelas mesmas semirretas opostas. Por exemplo, os ângulos $\hat{a}$ e $\hat{c}$, $\hat{b}$ e $\hat{d}$. Note que se dois ângulos são OPV então eles são congruentes, ou seja, eles têm as mesmas medidas. Por exemplo, se $\hat{a}$ vale 60º então $\hat{c}$ vale 60º.

O que seriam **ângulos correspondentes**?

São ângulos que estão da mesma posição em relação à transversal e em relação às paralelas, porém estão em paralelas diferentes, ou seja, são ângulos que estão no mesmo lugar, mas em paralelas distintas. Exemplos: $\hat{a}$ e $\hat{e}$, $\hat{b}$ e $\hat{f}$, $\hat{c}$ e $\hat{g}$, $\hat{d}$ e $\hat{h}$.

Podemos dizer que se **dois ângulos são correspondentes** então eles **são congruentes**, ou seja, eles têm as mesmas medidas. Ou seja, por exemplo: Se $\hat{a}$ mede 60º então $\hat{e}$ também mede 120º, Se $\hat{b}$ mede 120º então $\hat{f}$, também mede 120º.

Com **relação às paralelas**, o que significa dizer que os **ângulos são internos ou externos**?

Se eles estiverem entre as retas paralelas, dizemos que esses ângulos são **internos;** se não estiverem entre as paralelas dizemos que eles são **externos**.

Em **relação à transversal**, o que significa dizer que dois ângulos **são colaterais**?

Os elementos colaterais são aqueles que estão do mesmo lado. Pois bem, se dois ângulos são **colaterais** então eles estão do mesmo lado em relação à transversal, ou seja, ou os dois ângulos estão à direita ou à esquerda da transversal.

Por conseguinte, se estiverem de lados opostos ou alternados em relação à transversal dizemos que esses ângulos são **alternos**.

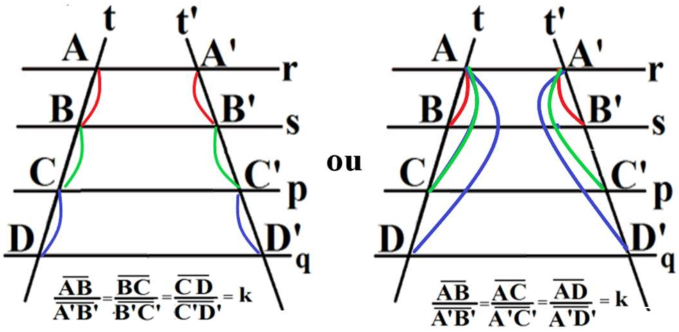
Perceba então que podemos classificar os pares de ângulos de quatro formas:

Alternos são congruentes	Internos	$\hat{c}$ e $\hat{e}$, $\hat{d}$ e $\hat{f}$.
	Externos	$\hat{a}$ e $\hat{g}$, $\hat{b}$ e $\hat{h}$.
Colaterais são suplementares	Internos	$\hat{c}$ e $\hat{f}$, $\hat{e}$ e $\hat{d}$.
	Externos	$\hat{a}$ e $\hat{h}$, $\hat{b}$ e $\hat{g}$.

Observe que se dois ângulos são alternos, sejam internos ou externos, eles são congruentes, isto é, possuem as mesmas medidas. Por outro lado, se dois ângulos forem colaterais, sejam internos ou externos, eles são suplementares, isto é, sua soma é 180º.

TEOREMA DE TALES

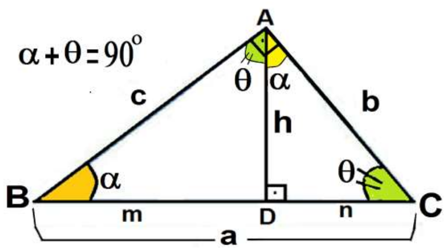
<u>TEOREMA</u>; *"Se um feixe de retas paralelas for interceptado por retas transversais então se formam segmentos correspondentes que são proporcionais."*



Segmentos correspondentes são aqueles compreendidos entre as mesmas paralelas, por exemplo: $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$. Devemos lembrar também que se duas grandezas são proporcionais então a razão entre elas é constante.

RELAÇÕES MÉTRICAS NO Δ RETÂNGULO

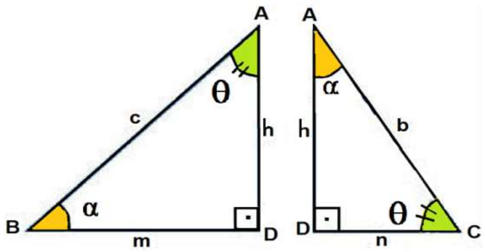
Os elementos de um triângulo retângulo estão apresentados a seguir:



Sendo:
a: medida da hipotenusa (lado oposto ao ângulo de 90º)
b: cateto
c: cateto
h: altura relativa à hipotenusa
m: projeção do cateto c sobre a hipotenusa
n: projeção do cateto b sobre a hipotenusa

SEMELHANÇA E RELAÇÕES MÉTRICAS

Considere os triângulos semelhantes ABC, DBA e DAC, representados nas imagens:



$$\boxed{m + n = a}$$

Como os triângulos ABC e DBA são semelhantes, temos as seguintes proporções: $\underbrace{\frac{h}{b}}_{1} = \underbrace{\frac{n}{c}}_{2} = \underbrace{\frac{c}{a}}_{3}$

Igualando 1 e 2, 1 e 3, 2 e 3, temos:

$$1)\ c \cdot h = n \cdot b \qquad 2)\ a \cdot h = b \cdot c \qquad 3)\ c^2 = a \cdot n$$

De 1 temos que: ***"O produto de um cateto pela altura relativa à hipotenusa é igual ao produto de sua projeção pelo outro cateto"***, ou seja:

$$1)\ \begin{cases} c \cdot h = n \cdot b \\ b \cdot h = m \cdot c \end{cases}$$

De 2 temos que:
"O produto da hipotenusa por sua altura é igual ao produto dos catetos". $\Rightarrow$ $a \cdot h = b \cdot c$
De 3 temos que:
"O quadrado do cateto é igual ao produto de sua projeção pela hipotenusa", ou seja, $\begin{cases} c^2 = a \cdot n \\ b^2 = a \cdot m \end{cases}$.

Da semelhança entre os triângulos DBA e DAC encontramos a proporção: $\underbrace{\frac{h}{n}}_{1} = \underbrace{\frac{m}{h}}_{2} = \underbrace{\frac{c}{b}}_{3}$

Igualando 1 e 2, temos: $h^2 = m \cdot n$, assim temos que:
"o quadrado da altura é igual ao produto das projeções do cateto sobre a hipotenusa."

TEOREMA DE PITÁGORAS

Temos ainda que a soma das projeções m e n é igual a hipotenusa, ou seja: m + n = a.
A mais importante das relações métricas é o **<u>Teorema de Pitágoras</u>**. Podemos demonstrar o teorema usando a soma de duas relações encontradas anteriormente.

Vamos somar a relação $b^2 = a \cdot n$ com $c^2 = a \cdot m$, conforme mostrado a seguir:

$$\begin{cases} b^2 = a \cdot n \\ c^2 = a \cdot m \end{cases}$$

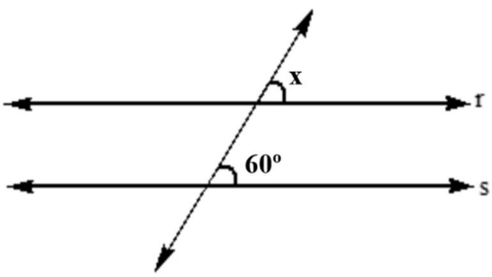
$$b^2 + c^2 = a\,\underbrace{(n + m)}_{a}\text{, portanto}$$

$$b^2 + c^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Teorema \text{ de Pitágoras}}$$

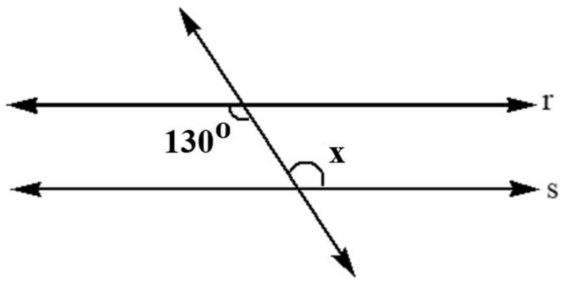
ATIVIDADES

01) Calcule x, sabendo que r//s:

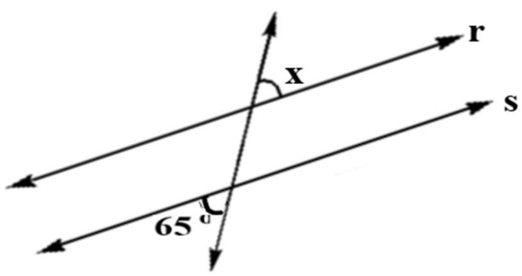
a)



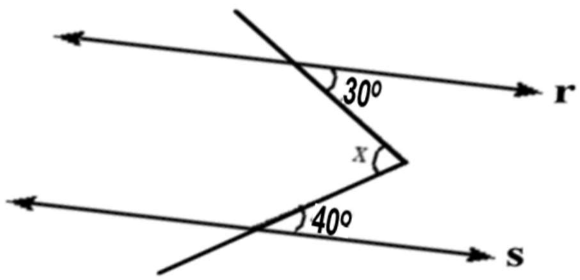
b)



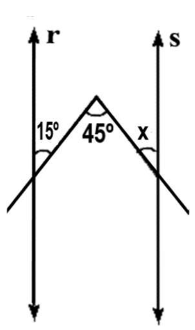
c)



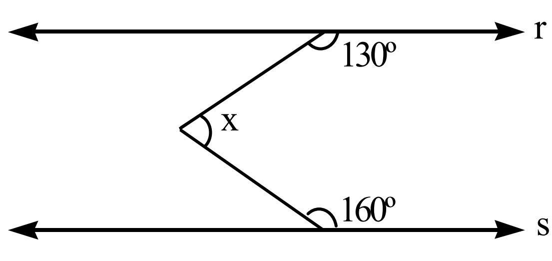
d)



e)

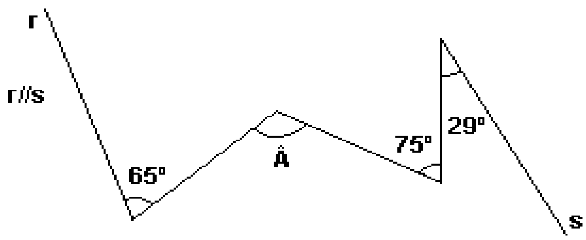


f)

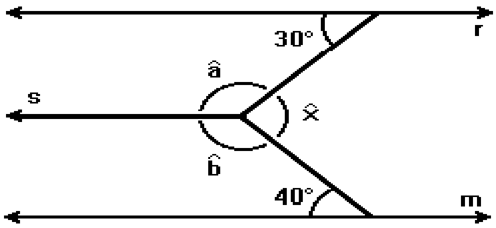


02) Sendo as retas r e s paralelas, determine o valor do ângulo Â.

A) (   ) 111º .
B) (   ) 112º.
C) (   ) 113º.
D) (   ) 114º.

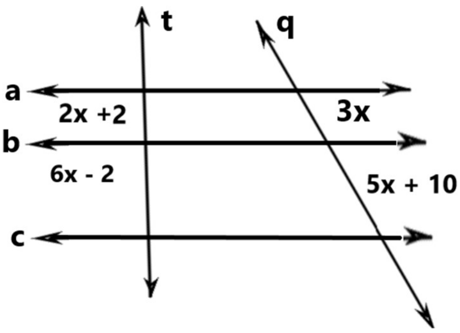


03) Na figura a seguir determine â, $\hat{b}$ e $\hat{x}$ sabendo que r//s e s//m.

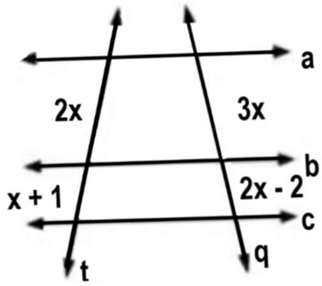


04) Sabendo que as retas a, b e c são retas paralelas, utilize o Teorema de Tales e determine o valor de x na figura a seguir:

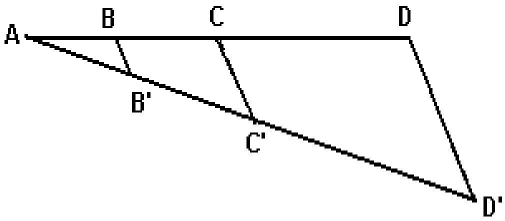
a)



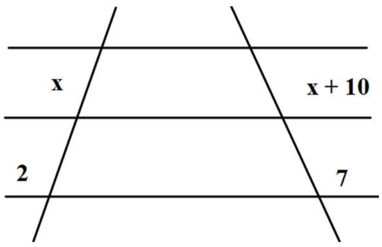
b)



05) A figura a seguir mostra um segmento AD dividido em três partes: AB = 2cm, BC = 3cm e CD = 5cm. O segmento AD' mede 13 cm e as retas BB' e CC' são paralelas a DD'. Determine os comprimentos dos segmentos AB', B'C' e C'D'.

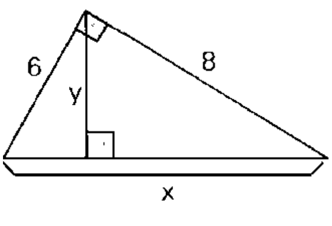


06) A seguir estão duas retas paralelas cortadas por duas transversais. Calcule o valor de x.

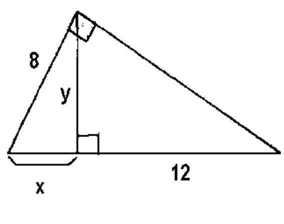


07) Determine x e y nos casos:

a)

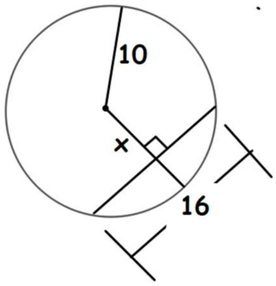


b)

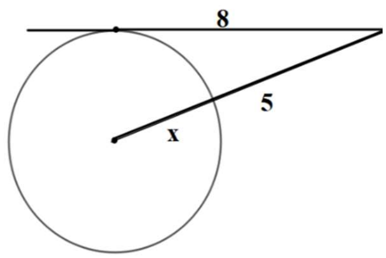


08) Determine o valor de x nos casos:

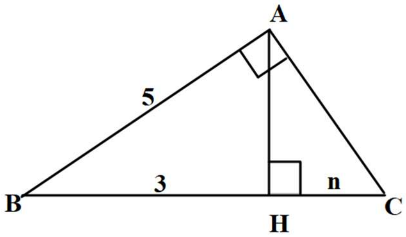
a)



b)



09) Observe o triângulo retângulo ABC a seguir.

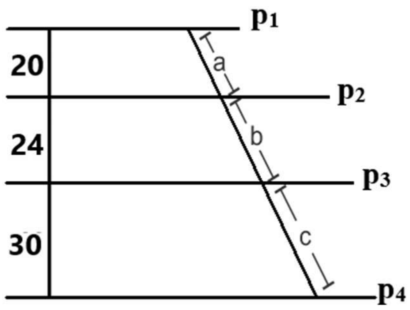


Sabendo que o ângulo A é reto, o valor de n é

A) ( ) 22/3
B) ( ) 16/3
C) ( ) 22
D) ( ) 16

10) Na figura a seguir, as retas p_1, p_2, p_3 e p_4 são paralelas e, a, b e c representam medidas dos segmentos tais que $a + b + c = 111$. Conforme esses dados, os valores de a, b e c são, respectivamente, iguais a

A) ( ) 30, 36 e 45.
B) ( ) 20, 26 e 35.
C) ( ) 30, 36 e 44.
D) ( ) 60, 27 e 88.



11) Determine as medidas das hipotenusas nos triângulos retângulos a seguir: