DC-GOEM NA PRÁTICA!

3ª série
Ensino Médio
4º Bimestre
Professor/a

Matemática e suas Tecnologias

Recurso Didático para o(a) Professor(a)

DC-GOEM NA PRÁTICA!

ESTADO DE GOIÁS
SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO

Governador do Estado de Goiás
Ronaldo Ramos Caiado

Vice-Governador do Estado de Goiás
Lincoln Graziani Pereira da Rocha

Secretária de Estado de Educação
Aparecida de Fatima Gavioli Soares Pereira

Superintendente de Ensino Médio
Osvany da Costa Gundim Cardoso

Gerente de Produção de Materiais
Vanuse Batista Pires Ribeiro

Gerente de Ensino Médio
Itatiara Teles de Oliveira

Coordenadora Geral de Gerência de Produção de Material para Ensino Médio
Alessandra Nery da Silva

Coordenadora de Currículo e Produção de Materiais para Ensino Médio
Telma Antônia Rodrigues Alves

ELABORADORES/AS

Linguagens e suas Tecnologias
Joanede Aparecida Xavier de Souza Fé - Coordenadora de Área
Aline Folly Faria Monteiro - Arte /Música
Elaene Lopes Carvalho - Língua Estrangeira/ Inglês
Fernanda Moraes de Assis – Arte/ Artes Visuais
Ivair Alves de Souza - Língua Portuguesa
Luciana Evangelista Mendes – Língua Estrangeira/ Espanhol
Luzia Mara Marcelino - Língua Portuguesa
Mara Veloso de Oliveira Barros - Arte /Artes Cênicas

Onira de Ávela Pinheiro Tancrede - Artes / Teatro

Rosane Christina de Oliveira - Educação Física - Arte / Dança

Renato Ribeiro Rodrigues - Educação Física - Arte / Dança

Matemática e suas Tecnologias

Henrique Carvalho Rodrigues – Coordenador de Área

Alexsander Costa Sampaio

Silvio Coelho da Silva

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

Pedro Ivo Jorge de Faria – Coordenador de Área

Alexandre Rodrigues Bernardes - Filosofia

Carlos César Higa – Sociologia

Fernanda Serbêto – História

Gustavo Henrique José Barbosa – Sociologia/Filosofia

Ione Apolinário Pinto – Geografia

Ciências da Natureza e suas Tecnologias

Núbia Pontes Pereira – Coordenadora de Área

Francisco Rocha – Física

Ítalo Rodrigues Guedes - Física

Leonardo Dantas Vieira – Física

Murilo Pereira Ramos – Biologia

Rosimeire Silva de Carvalho – Química

Sandra Marcia de Oliveira Silva – Biologia

Sara Giselle de Cassia Alexandre Gondim – Biologia

Equipe de Revisão

Elaine Nicolodi

Vanuse Batista Pires Ribeiro

Designer Gráfico

Hugo Leandro de Leles Carvalho – capa

Edição e publicação do NetEscola e Drives de Gerência de Produção de Material para Ensino Médio

Jhonatan César Alcântara Araújo

Equipe de Diagramação

Alessandra Nery da Silva

Jhonatan César Alcântara Araújo

Sara Giselle de Cassia Alexandre Gondim

Matemática e suas Tecnologias

ORIENTAÇÃO AO(A) PROFESSOR(A)

O material didático desenvolvido nesta apostila propõe aos professores(as) e estudantes um alinhamento com o Documento Curricular para Goiás-Etapa Ensino Médio para a área de Matemática e suas Tecnologias. Os módulos foram organizados seguindo a Bimestralização desta área do conhecimento, respeitando as competências específicas, habilidades específicas, objetivos de aprendizagem e objetos de conhecimento deste mesmo documento.

Por fim, as sugestões de trabalho, apresentadas neste material didático, refletem a constante busca da promoção das competências de Matemática e suas Tecnologias, indispensáveis ao enfrentamento dos desafios sociais, culturais e profissionais do mundo contemporâneo.

MOMENTO 01 - MATEMÁTICA

Recomposição: Inserção Curricular

PROCEDIMENTOS

ATENÇÃO!

Professor(a) um breve contexto da recomposição:

A recomposição de aprendizagem é um momento que deve ter um olhar sobre múltiplos aspectos.

Na educação sobre houve uma lógica na sua concepção de ensino-aprendizagem antes da pandemia. Porém, agora, é necessário reordenar esta dialética, já não basta só ‘voltar ao que era antes’, é fundamental focar a atenção nas coisas que devemos olhar.

Na recomposição devemos nos orientarmos com competências e habilidades não consolidadas e o que foi ou não oportunizado aos estudantes. Analisar o que não foi consolidado e, depois de tudo isso, construir estratégias para recompor as aprendizagens.

CONCEITO

ATENÇÃO!

CONCEITO BÁSICO

Temos que relembrar função exponencial para aprofundarmos nosso conhecimento em matemática financeira.

Situações em que ocorrem grandes variações crescentes ou decrescentes podem ser representadas por uma função exponencial.

Toda função que possui a lei de formação $f(x) = a^x, com\ a \in \mathbb{R}, a > 0\ e\ a \neq 1$, é denominada função exponencial.

Exemplos:

$f(x) = 2^x$

$f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x =$

$f(x) = \left(\sqrt{\frac{9}{16}}\right)^x$

Observação:

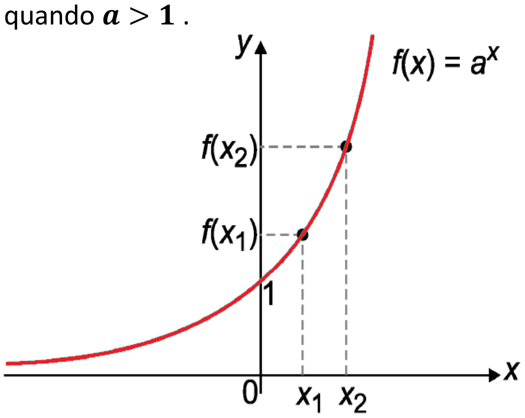
✓Se $a = 0$, teríamos uma situação assim, $x = -2$, *logo*, $f(x) = 0^{-2} = \frac{1}{0^2}$ o que não tem significado em $\mathbb{R}$

✓Se $a = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$, então **f(x)** = 1 é uma função constante.

✓Se $a < 0$, $f(x) = a^x$, nem sempre existe, por exemplo, se $a = -4\ e\ x = \frac{1}{2}$, teríamos $f(x) = (-4)^{\frac{1}{2}} \notin \mathbb{R}$.

FUNÇÃO CRESCENTE

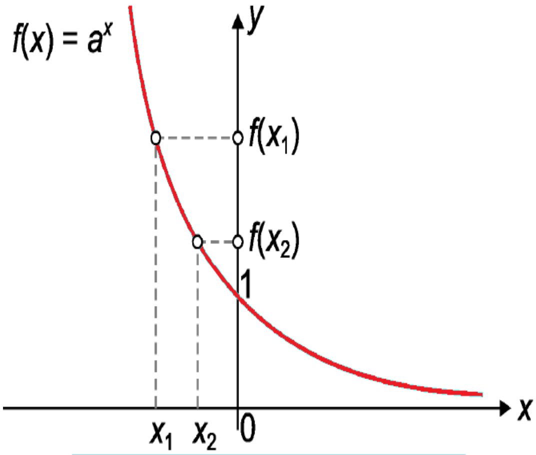
A **função exponencial** será **crescente** quando $a > 1$.



$$\boxed{x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)}$$

FUNÇÃO DECRESCENTE

A **função exponencial** será **decrescente** se a for $\mathbf{0 < a < 1}$.



$$\boxed{x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)}$$

Nos gráficos pode-se observar que:

- ✓ $\boldsymbol{D(f)} = \mathbb{R}$
- ✓ $\boldsymbol{Im(f)} = \mathbb{R}_+^*$
- ✓ $\boldsymbol{f(x) = a^x, com\ a} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{a > 0\ e\ a} \neq 1$ intercepta o eixo das ordenadas no ponto (0, 1), pois $\boldsymbol{a^0 = 1}$.
- ✓ $\boldsymbol{f(x) = a^x}$ não intercepta o eixo das abscissas para $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}_+^*, \boldsymbol{a^x \neq 0}$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.
- ✓ Quando definida de $\mathbb{R}\ \boldsymbol{em}\ \mathbb{R}_+^*$, a função $\boldsymbol{f(x) = a^x}$ é:

Injetora, porque para $\forall \boldsymbol{x_1} \in \mathbb{R}\ \boldsymbol{e}\ \forall \boldsymbol{x_2} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{x_1 \neq x_2} \rightarrow \boldsymbol{f(x_1) \neq f(x_2)}$.

Sobrejetora, porque $\mathbf{CD(f) = Im(f)} = \mathbb{R}_+^*$.

Assim, sendo injetora e sobrejetora, a função é bijetora e, portanto, admite inversa que será a função logarítmica $\boldsymbol{f(x) = log_1\, x}$

SUGESTÃO DE ATIVIDADE

ATIVIDADE 01 –

Classifique como crescente ou decrescente.

a) $f(x) = \left(\sqrt{3}\right)^x$

Resposta: crescente.

b) $f(x) = \left(\frac{5}{3}\right)^x$

Resposta: crescente.

c) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

Resposta: decrescente.

d) $f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$

Resposta: decrescente.

e) $f(x) = (0{,}3)^x$

Resposta: decrescente.

f) $f(x) = \pi^x$

Resposta: crescente.

g) $f(x) = 2^{-1}$

Resposta: decrescente.

ATIVIDADE 02 –

Marque a alternativa correta.

Dada a função $f(x) = a^x, em\ que\ 0 < a < 1$, temos que

(A) se $x > 0, então\ f(x) > 1$.

(B) se $x < 0, então\ f(x) < 1$.

(C) se $x < 0, então\ f(x) < -1$.

(D) se $x > 0, então\ f(x) < 1$.

(E) se $x \geq 0, então\ f(x) \leq 1$.

MOMENTO 02 - MATEMÁTICA

Recomposição: Nivelamento

CONCEITO

ATENÇÃO!

FUNÇÕES EXPONENCIAIS E A PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Conceito Básico

Relação entre a Progressão Geométrica e a Função Exponencial

Vimos na aula anterior que uma função **f:ℝ→ℝ*+** chama-se função exponencial quando existe um número real *a*, com a **> 0 e a ≠ 1, tal que f(x) = a^x, para todo x ∈ ℝ.**

Nesta aula iremos estudar a relação em que uma função exponencial do tipo $f(x) = \boldsymbol{ba^x}$, leva uma progressão aritmética PA a uma progressão geométrica PG, cuja razão é dada por $\boldsymbol{a^r}$, sendo *r* a razão da PA.

Para isto vamos relembrar o que é uma PG.

Uma progressão geométrica PG é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando-se o anterior por uma constante $\boldsymbol{q}$ chamada razão da PG.

Conforme termo geral: $\boldsymbol{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$ **, com n ∈ ℕ**. (com o primeiro termo sendo $\boldsymbol{a_1}$)

Vale lembrar que quando a situação problema envolver o conjunto ℕ, pode-se fazer uso de qualquer uma das relações – ou a função exponencial ou a progressão geométrica, porém quando a situação envolver o conjunto ℝ, não se poderá utilizar a progressão geométrica.

Vamos analisar uma progressão aritmética – **4, 0, 4, 8, 12, ...** de razão **4** é, e uma função exponencial do tipo $\boldsymbol{f(x)\ 4\ \cdot 4^x}$**.**

Observamos que os termos da **PA f(– 4), f(0), f(4), f(8), f(12), ...** é uma progressão geométrica. Veja

$\boldsymbol{f(x) 4 \cdot 4^x}$

$$\boldsymbol{f(-\ 4) 4 \cdot 4^{-4} = \frac{1}{64}}$$

$$\boldsymbol{f(0) 4 \cdot 4^0 = 4}$$

$$\boldsymbol{f(4) 4 \cdot 4^4 = 1024}$$

$$\boldsymbol{f(8) 4 \cdot 4^8 = 262\ 144}$$

$$\boldsymbol{f(12) 4 \cdot 4^{12} = 67\ 108\ 864}$$

Assim, $\boldsymbol{\frac{1}{64}}$**, 4, 1024, 262 144, 67 108 864, ...** é uma progressão geométrica e sua razão é **256**.

Exemplos 01:

Determine a razão de uma PG proveniente de uma PA de razão 3 e uma função exponencial $\boldsymbol{f(x) = 3 \cdot 5^x}$.

Vimos que a função exponencial do tipo $\boldsymbol{f(x) = ba^x}$**,** gera uma PG de razão $\mathbf{a^r}$.

Primeiro vamos determinar *a*. Para isto vamos considerar f(0) = primeiro termo e **f(1)** = segundo termo.

$$\boldsymbol{f(0) = 3 \cdot 5^0 = 3 \cdot 1 = 3}$$
$$\boldsymbol{f(1) = 3 \cdot 5^1 = 3 \cdot 5 = 15}$$

Logo,

$$\boldsymbol{a = \frac{f(1)}{f(0)} = \frac{15}{3} = 5}$$

Assim, a razão da PG é dada por $\boldsymbol{a^r = 5^3 = 125}$

Resolução de problema

2 – O valor de um carro daqui a *x* anos é dado pela lei $\boldsymbol{V_{carro} = 25000 \cdot (0,8)^x}$**.** Daqui a 6 anos, qual será o valor deste carro?

➢**Por meio da Função exponencial**

Organizando os dados do problema, temos:

***x* = 5**

V_{carro} = 25 000.(0,8)^5

V_{carro} = 25 000.(0,32768)

V_{carro} = 8.192

➢**Por meio da Progressão Geométrica**

O valor inicial do carro é de **Vcarro = 25 000**

Tempo	Valor inicial	1	2	3	4	5
Valor	25 000,00	20 000,00	16 000,00	12 800,00	10 240,00	8 192,00

Observe que o valor do automóvel, em função do tempo em anos após sua compra, forma uma PG decrescente, ou seja:

20 000,00	16 000,00	12 800,00	10 240,00	8 192,00

Assim, temos o primeiro termo:

$\boldsymbol{a_1 = 20\ 000,00}$ **e a razão** $\boldsymbol{q = 0,8.}$

Como o termo geral é $\boldsymbol{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$**,** com **n** ∈ ℕ, na PG tem-se:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$$
$$\boldsymbol{a_5 = 20\ 000\ \cdot (0,8)^4}$$
$$\boldsymbol{a_5 = 20\ 000\ \cdot (0,4096)}$$
$$\boldsymbol{a_5 = 8\ 192,00}$$

SUGESTÃO DE ATIVIDADE

ATIVIDADE 01 –

Dadas a progressão aritmética **3, 6, 9, 12, ...** e a função exponencial $\boldsymbol{f(x) = 5 \cdot 2^x}$, determine:

a) a razão dessa progressão aritmética.

Resposta: Como o enunciado diz que 3, 6, 9, 12, ..., é uma PA, vamos determinar a razão.

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$

$6 = 3 + (2-1) \cdot r$

$6 = 3 + r$

$r = 3$

b) se a sequência f(3), f(6), f(9), f(12), ..., é uma progressão geométrica e se for, determine a razão.

Resposta: Analisando a sequência.

$f(x) = 5 \cdot 2^x$

$f(3)5 \cdot 2^3 = \ 40$

$f(6)5 \cdot 2^6 = 320$

$f(9)5 \cdot 2^9 = 2\,560$

$f(12)5 \cdot 2^{12} = 2\,480$

A sequência f(3), f(6), f(9), f(12), ..., é uma progressão geométrica de razão (q) = 256.

ATIVIDADE 02 –

Uma progressão aritmética de razão 5 e uma função exponencial $\boldsymbol{f(x) = 2 \cdot 3^x}$, determinam uma progressão geométrica de qual razão?

Resposta:

$a = \frac{f(1)}{f(0)} = \frac{6}{2} = 3$

Logo, $a^r = 3^5 = 243$

CAPÍTULO 01 – MOMENTO 01- MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

COMPONENTE CURRICULAR

MATEMÁTICA

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA

Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

HABILIDADE DA BNCC

(EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM DC-GOEM

(GO-EMMAT303A) Determinar os valores dos capitais, juros (simples e compostos), montantes, taxas e/ou tempos - com as conversões de medidas necessárias de aplicações financeiras, empréstimos, entre outros, utilizando procedimentos matemáticos adequados para interpretar situações que envolvem a ideia de juros apresentadas em textos, representações gráficas, quadros, tabelas e/ou planilhas (eletrônicas ou não).

(GOEMMAT303B) Interpretar situações que envolvem a ideia de juros (simples ou compostos) apresentadas em textos, representações gráficas, quadros, tabelas e/ou planilhas (eletrônicas ou não) verificando se o crescimento apresentado, em cada caso, é linear ou exponencial para comparar os usos dos conceitos (juros simples ou compostos) em situações específicas do cotidiano.

OBJETOS DE CONHECIMENTO

Conceitos de Matemática Financeira.

Juros simples e juros compostos. Função polinomial do 1º grau associado a juros simples e função exponencial associado a juros compostos.

MOMENTO 01 - MATEMÁTICA

Imersão Curricular

CONCEITO

ATENÇÃO!

FUNÇÃO EXPONENCIAL E A APLICAÇÃO

Conceito Básico

Vimos em aulas anteriores que a função exponencial pode representar situações em que ocorrem grandes variações crescentes ou decrescentes. Estas situações podem estar presentes em fenômenos da natureza, nas aplicações financeiras, no crescimento populacional e ainda em problemas urbanos como a acumulação de poluentes. Assim, a função exponencial mostra que, determinada situação, longo do tempo, tende a aumentar seus valores ou a reduzi-los.

SUGESTÃO DE ATIVIDADE

ATIVIDADE 01 –

Em uma cidade, a população feminina cresce conforme a expressão $M_{(t)} = 900(1{,}035)^t$. Sabendo que t representa os períodos em anos e $M_{(t)}$ o número mulheres após t anos, determine a população desse país daqui a 80 anos. Use $(1{,}035)^{10} = \sqrt{2}$

Resposta: $M_{(80)} = 900(1{,}035)^{80}$

Aplicando propriedade de potência.

$M_{(80)} = 900((1{,}035)^{10})^8$

$M_{(80)} = 900\left(\sqrt{2}\right)^8$

lembre-se de que potências com expoente racional são raízes: $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$

$M_{(80)} = 900\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^8$

$M_{(80)} = 900 \cdot 2^4$

$M_{(80)} = 900 \cdot 16$

$M_{(80)} = 14\,400$

ATIVIDADE 02 –

Ao estudar juros compostos vemos que o montante M é o valor a ser recebido após a aplicação de um capital C, a uma taxa *i*, por um certo período de tempo t. Este montante é calculado pela expressão $M = C \cdot (1 + i)^t$. Se um determinado capital de R$ 8 000,00 for aplicado a uma taxa de 15% ao ano, por um período de 4 anos, qual seria o montante ao final?

Resposta:

$M = 8\,000 \cdot (1 + 0{,}15)^4$

$M = 8\,000 \cdot 1{,}15^4$

$M = 8\,000 \cdot 1{,}74900625$

$M = 13\,992{,}05$

ATIVIDADE 03 –

A variação da capacidade de um recipiente é dada pela função $c^t = c_0 \cdot 2^{(-0{,}1)^t}$ Considerando c_0 a capacidade inicial do recipiente e c^t a capacidade do recipiente após t dias. Em quantos dias a quantidade do recipiente se reduzirá à metade do que era no início?

Resposta:

$c^t = \frac{1}{2} c_0$

$\frac{1}{2} c_0 = c_0 \cdot 2^{(-0{,}1)^t}$

$2^{-1} = 2^{-0{,}1t}$

$-0{,}1t = -1$

$t = 10$

ATIVIDADE 04 –

Os pesquisadores observaram que o crescimento do montante financeiro dado pela função $B(t) = 400 \cdot 3^{kt}$, onde B é o valor em reais, t é o tempo em meses e k é uma constante que depende do valor financeiro. Depois de 6 meses há um total de R$ 1200,00, calcule:

a) a constante k.

Resposta:

Se, t = 6 →B= 1 200, calcular valor de k

a) 1 200 = 400. 3^{6k}

$\frac{1\,200}{400} = 3^{6k}$

$3 = 3^{6k}$

$1 = 6k$

$k = \dfrac{1}{6}$

____

____

____

____

b) qual o montante 18 meses depois que se iniciou a aplicação.

Resposta:

$B_{18} = 400.3^{18\frac{1}{6}}$

$B_{18} = 400.3^{3}$

$B_{18} = 400.27$

$B_{18} = 10\ 800$

____

____

____

ATIVIDADE 04 – (PUC-RJ/2012-Adaptada)

A equação $2^{x^2-14} = \frac{1}{1024}$. A soma das duas soluções é

(A) – 5

(B) 0

(C) 2

(D) 14

(E) 1024

Resolução: Reduzindo à mesma base e igualando os expoentes, obtemos:

$2^{x^2-14} = \frac{1}{1024}$

$2^{x^2-14} = 2^{-10}$

$x^2 - 14 = -10$

$x^2 - 4 = 0$

$x = \pm\sqrt{4}$

$x = \pm 2$

Como a questão pede a soma, $2 + (-2) = 0$.

MOMENTO 02 - MATEMÁTICA

CONCEITO

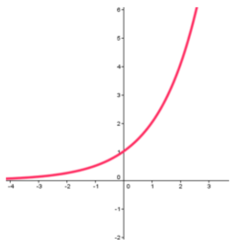
ATENÇÃO!

FUNÇÃO EXPONENCIAL – GRÁFICOS I

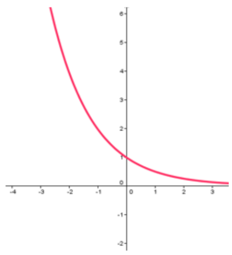
Conceito Básico

Vimos em aulas anteriores que existem dois tipos de curvas para o gráfico de uma função exponencial: crescente e decrescente.

Gráfico da Função Crescente Gráfico da Função Decrescente



$a > 1$



$0 < a < 1$

Representação da Função Exponencial no Plano Cartesiano

Para representarmos graficamente uma função exponencial, vamos primeiramente definirmos uma função exponencial qualquer, em seguida, vamos atribuir alguns valores para x e, com os respectivos valores de f(x), montarmos uma tabela. Após, vamos localizar os pontos no plano cartesiano para traçarmos a curva do gráfico.

1º - Seja a função $\boldsymbol{f(x) = 2^{x+1}}$.

Vamos calcular

$f(-2) = 2^{-2+1} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

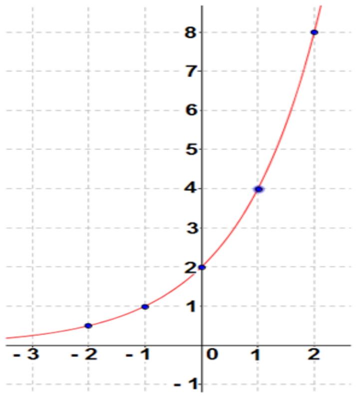
$f(-1) = 2^{-1+1} = 2^{0} = 1$

$f(0) = 2^{0+1} = 2^{1} = 2$

$f(1) = 2^{1+1} = 2^{2} = 4$

$f(2) = 2^{2+1} = 2^{3} = 8$

x	f(x)
– 2	$\frac{1}{2}$
– 1	1
0	2
1	4
2	8



Como $a > 1$, à medida que os valores de x aumentam, os correspondentes de valores de **f(*x*)** também aumentam, então a função é crescente.

2º – Seja a função $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$.

$$f(-2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2+1} = 2^{\,2-1} = 2$$

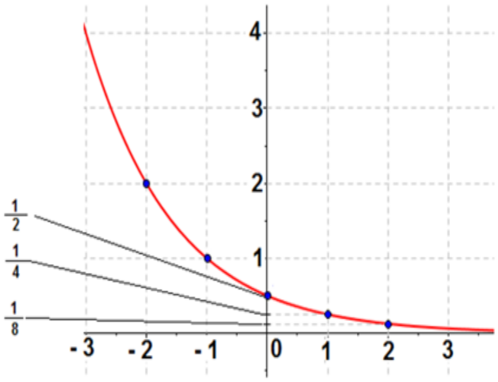
$$f(-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1+1} = 2^0 = 1$$

$$f(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{0+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$$

$$f(1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$f(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

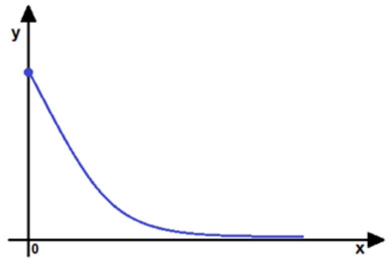
x	f(x)
-2	2
-1	1
0	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{8}$



Como $0 < a < 1$, à medida que os valores de x aumentam, os correspondentes de valores de f(x) diminuem, então a função é decrescente.

APLICANDO O CONHECIMENTO

Uma determinada pilha possui sua capacidade dada pela função $y = a^x$ em relação ao tempo ***x***.



Analise o gráfico e responda:

a) a potência da pilha está aumentando ou diminuindo? Justifique?

Resposta: Observe que $x_2 > x_1$, *e que* $f(x_2) < f(x_1)$, portanto ela está diminuindo.

b) esta pilha perderá sua capacidade em algum momento? Justifique?

Resposta. Não. À medida que os valores de **x** aumentam, os correspondentes de valores de **f(*x*)** diminuem, logo, a função é decrescente. Assim, $0 < a < 1$, com isso a curva nunca interceptará o eixo ***x***, ou seja, a pilha nunca chegará a zero.

c) determine quais são os possíveis valores de a?

Resposta. Como vimos na resposta anterior os possíveis valores são $(a \in \mathbb{R}/0 < a < 1)$.

SUGESTÃO DE ATIVIDADE

ATIVIDADE 01 –

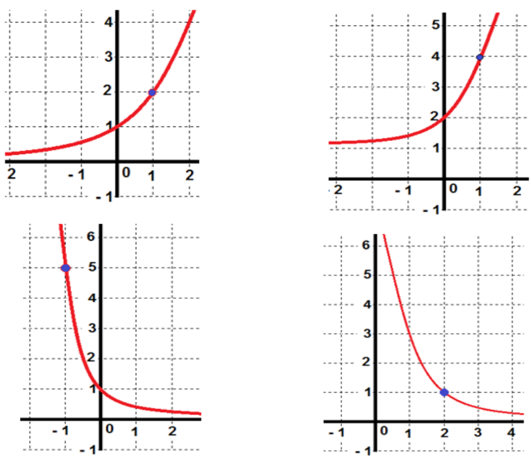
Relacione os gráficos com às funções correspondentes.

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$$

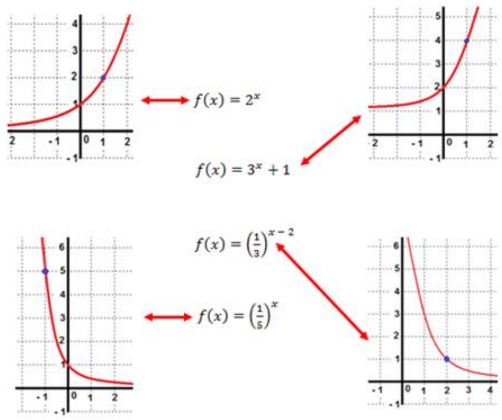
$$f(x) = 3^x + 1$$

$$f(x) = 2^x$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$$

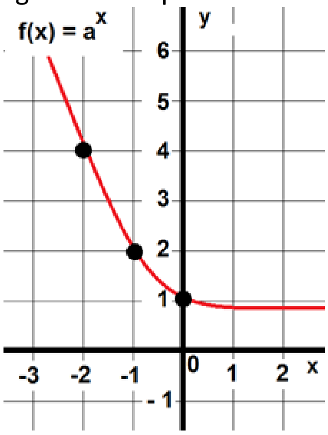


Resolução:



ATIVIDADE 02 –

Analise o gráfico e responda.



a) Determine o valor de a.

Resolução:

a) $2 = a^{-1}$

$2 = \frac{1}{a}$

$2a = 1$

$a = \frac{1}{2}$

____
____
____
____

b) O gráfico é crescente ou decrescente? Justifique.

Resolução:

Como $0 < a < 1$, então o gráfico é decrescente.

____
____
____
____

c) Considerando f(8), determine o valor de x.

Resolução:

$8 = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$8 = 2^{-x}$

$2^3 = 2^{-x}$

$3 = -x \rightarrow x = -3$

____
____
____
____

MOMENTO 03 - MATEMÁTICA

CONCEITO

ATENÇÃO!

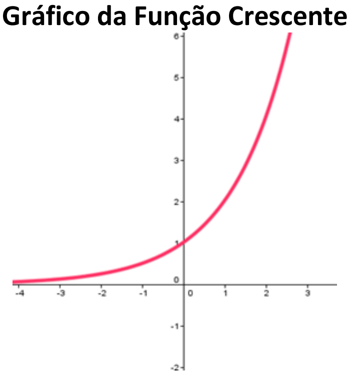
FUNÇÕES EXPONENCIAIS – GRÁFICOS II

Conceito Básico

Vimos na aula anterior a estrutura do gráfico de uma função exponencial, nesta aula daremos continuidade a este assunto, estudando as características do gráfico.

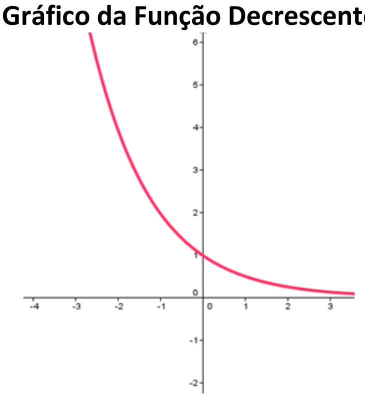
Características da função $f(x) = a^x$

Gráfico da Função Crescente



$a > 1$

Gráfico da Função Decrescente



$0 < a < 1$

Analisando o gráfico da função exponencial do tipo $\boldsymbol{f(x) = a^x}$, podemos observar algumas características:

- ✓ O gráfico nunca intercepta o eixo x;
- ✓ Não tem pontos nos quadrantes 3 e 4.
- ✓ O gráfico sempre cortará o eixo y no ponto (0,1);
- ✓ Os valores de y são sempre positivos, portanto o conjunto imagem é $Im = \mathbb{R}_+^*$;

Outras características importantes:

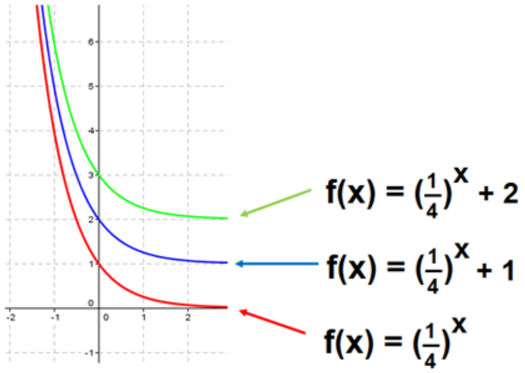
- ✓ $D(f) = \mathbb{R}$
- ✓ $Im = \mathbb{R}_+^*$
- ✓ A função exponencial é bijetora.

Vale ressaltar que o princípio aplicado no desenvolvimento da função exponencial $\boldsymbol{f(x) = a^x}$ pode ser aplicado em outras funções, como por exemplo:

- ✓ $f(x) = 3^x + 1$
- ✓ $f(x) = 2^{x+1}$
- ✓ $f(x) = 2 \cdot 5^x$

GRÁFICO COM TRANSLAÇÃO

Observe o gráfico.



A função que originou o gráfico é dada por $\boldsymbol{f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x}$, deslocados k unidades de vezes.

Assim, o gráfico de $\boldsymbol{f(x) = a^x + k}$, sendo $\boldsymbol{0 < a \neq 1}$, e k uma constante real, pode ser obtido a partir do gráfico $\boldsymbol{f(x) = a^x}$, deslocando-o $\boldsymbol{k}$ unidades para cima, se for positivo ou $\boldsymbol{k}$ unidades para baixo se for negativo.

SUGESTÃO DE ATIVIDADE

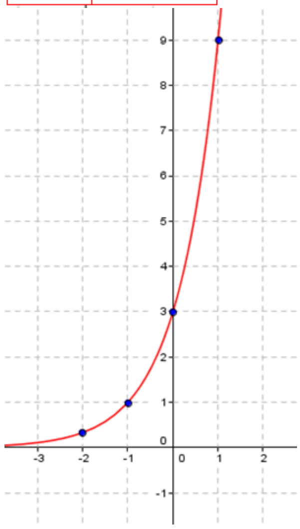
ATIVIDADE 01 –

Esboçar o gráfico da função $\boldsymbol{f\ de}\ \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, definida por:

a) $f(x) = 3^{x+1}$

Resolução:

x	f(x)
-2	$\frac{1}{3}$
-1	1
0	3
1	9

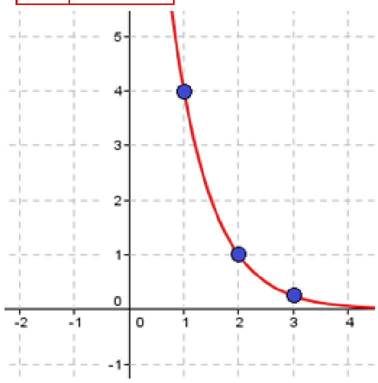


____
____
____

b) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x-2}$

Resolução:

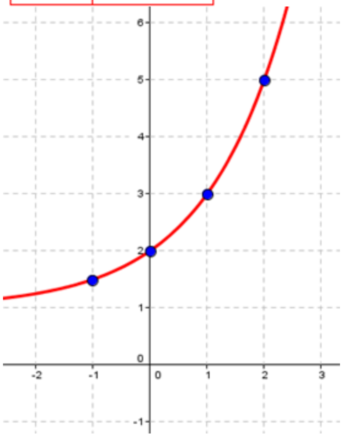
x	f(x)
1	4
2	1
3	$\frac{1}{4}$



____
____
____

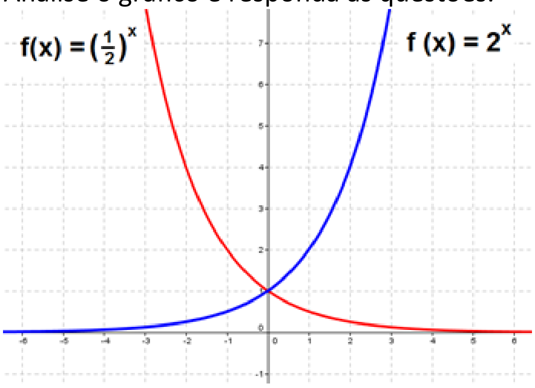
c) $f(x) = 2^x + 1$

x	f(x)
-1	$\frac{3}{2}$
0	2
1	3
2	5



ATIVIDADE 02 –

Analise o gráfico e responda às questões.



a) Se a variável x for positiva e assumir valores crescentes muito grandes, o que ocorrerá à função $f(x) = 2^x$?

Resolução:

Admitirá valores muito grandes.

b) Se a variável x for negativa e assumir valores absolutos crescentes muito grandes, o que ocorrerá à função $f(x) = 2^x$?

Resolução:

Admitirá valores muito próximos de zero.

ATIVIDADE 03 –

Leia o texto a seguir.

Certa aplicação possuía um valor inicial de R$ 25 000 quando alguns eventos globais impulsionaram a economia. Desde então a aplicação tem crescido em uma constante de 9% ao ano.

De acordo com o enunciado, responda às questões:

a) Determine a lei de formação da função.

Resolução:

$$M = 25\,000 \cdot 1{,}09^x$$

b) Após 10 anos deste evento, qual o valor aproximado, em reais, do montante?

Resolução:

R$ 59 184

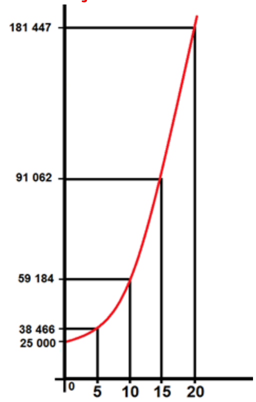
c) O montante atingirá o valor de R$ 181.447,00, após quantos anos?

Resolução:

23 anos.

d) Esboce o gráfico.

Resolução:



ATIVIDADE 04 –

Leia o texto a seguir.

Carlos comprou um automóvel por 45 000,00 cuja depreciação está sob uma taxa fixa de 8% ao ano. Nestas condições, responda.

a) Qual a lei de formação da função que expressa esta depreciação?

Resposta: $D = 45\,000 \cdot 0{,}92^{n}$.

b) Qual o valor do automóvel daqui a 6 anos?

Resposta: R$ 27 285,98.

c) Depois de quantos anos o automóvel estará valendo R$ 23 094,85?

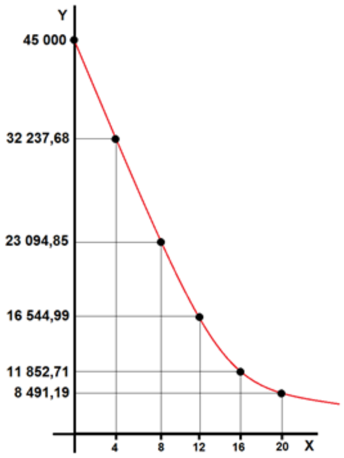
Resposta: 8.

Professor(a) lembre-se:

✓ Subtrairmos 8% de R$ 45 000,00 é o mesmo que multiplicarmos este valor por 0,92.

d) Esboce o gráfico.

Resposta:



ATIVIDADE 05 –

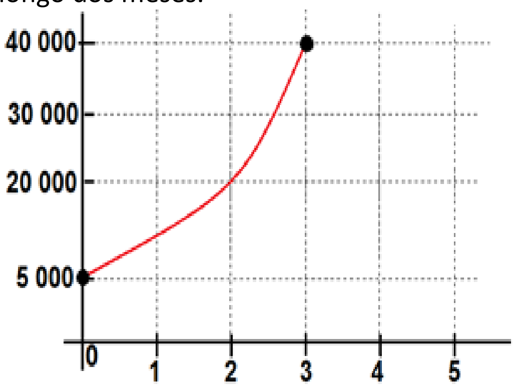
Dada a equação $3^{x+1} + 3^{x+2} = 2\,187$, determine o valor de x.

Resolução:

$$3 \cdot 3^x + 3^2 \cdot 3^x = 2\,187$$
$$3 \cdot 3^x + 9 \cdot 3^x = 2\,187$$
$$27 \cdot 3^x = 2\,187$$
$$3^x = \frac{2\,187}{27}$$
$$3^x = 81$$
$$3^x = 3^4$$
$$x = 4]$$

ATIVIDADE 06 –

Observe o gráfico, a seguir, que indica o crescimento de uma aplicação em reais ao longo dos meses.



Considerando a lei de formação $\boldsymbol{f(x) = a^x \cdot k}$, determine o valor de *k* e *a*.

Resolução:

$$k \cdot a^0 = 5\,000$$
$$k = 5\,000$$
$$f(x) = a^x \cdot k$$
$$40\,000 = a^3 \cdot 5000$$
$$a^3 = \frac{40\,000}{5\,000}$$
$$a^3 = 8$$
$$a^3 = 2^3$$
$$a = 2$$

MOMENTO 04 - MATEMÁTICA

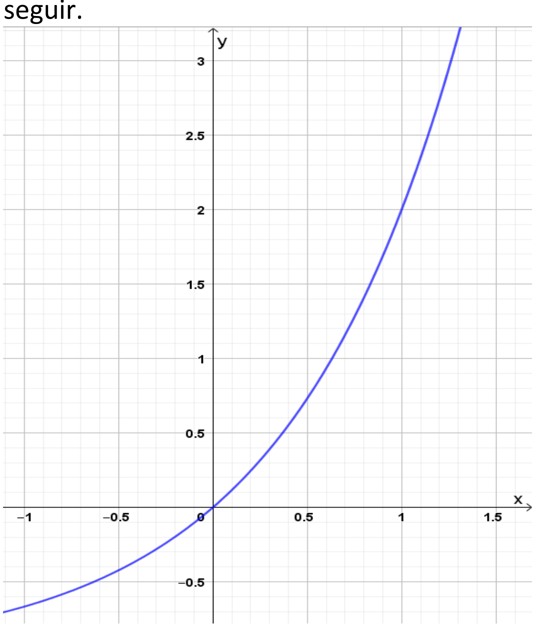
CONCEITO

ATENÇÃO!

Função Exponenciais: identificar representação algébrica
Conceitos Básicos

Professor(a), neste momento a intenção é apenas dar algumas características algébricas presentes na representação gráfica de funções exponenciais.

Vamos estudar algumas características presentes nas representações gráficas a seguir.

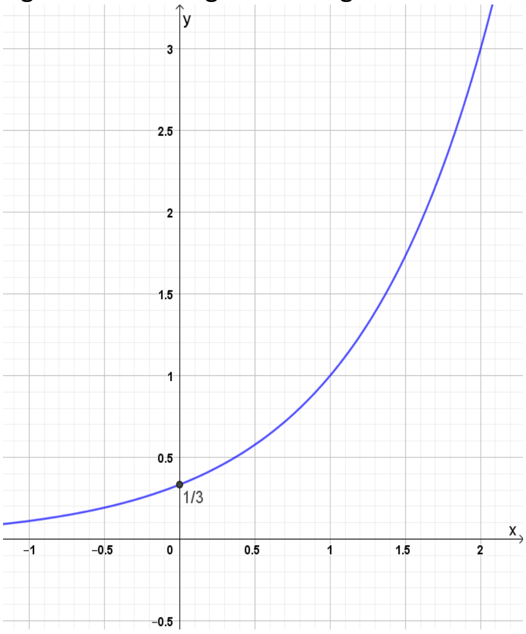


Afirmações a partir da leitura do gráfico:

- ➢ O gráfico representa uma função exponencial, isto significa que é do tipo: $f(x) = a^x$;
- ➢ O gráfico é crescente, isto significa que a base a é maior do que 1;
- ➢ O gráfico intercepta o eixo das ordenadas (y) no ponto $(0{,}0)$ e está abaixo do mesmo, isto significa que está transladado (deslocado) em uma unidade para baixo, ou seja, $f(x) = a^x - 1$;
- ➢ Os pontos $(0{,}0)$ e $(1{,}2)$ pertencem ao gráfico, isto significa que: $2 = a^1 - 1$, ou seja, $2 = a - 1 \rightarrow a = 2 + 1 \rightarrow a = 3$. Portanto, a representação algébrica da função exponencial que representa o gráfico dado é: $f(x) = 3^x - 1$.

Observação: este pensamento só é possível para o conjunto de funções do tipo: $f(x) = a^x + b$, com $a > 0$ e $a \neq 0$

Agora observe o gráfico a seguir.



Afirmações a partir da leitura do gráfico:

- ➢ O gráfico representa uma função exponencial, isto significa que é do tipo: $\boldsymbol{f(x) = a^x}$;
- ➢ O gráfico é crescente, isto significa que a base a é maior do que 1;
- ➢ O gráfico intercepta o eixo das ordenadas $\boldsymbol{(y)}$ no ponto $\boldsymbol{\left(0, \frac{1}{3}\right)}$ e não intercepta o eixo Oy, isto significa que está transladado (deslocado) no eixo das abscissa (x), ou seja, $f(x) = a^{x+b}$;
- ➢ Os pontos $\boldsymbol{\left(0, \frac{1}{3}\right)}$, $\boldsymbol{(1, 1)}$ **e** $\boldsymbol{(2, 3)}$ pertencem ao gráfico, isto significa que: $\boldsymbol{a^{0+b} = \frac{1}{3}}$**, ou seja,** $\boldsymbol{a^b = \frac{1}{3} \rightarrow a^b = 3^{-1} \rightarrow a = 3 \text{ e } b = -1}$**.** Portanto, a representação algébrica da função exponencial que representa o gráfico dado é**:** $\boldsymbol{f(x) = 3^{x-1}}$.

Observação: este pensamento só é possível para o conjunto de funções do tipo: $\boldsymbol{f(x) = a^{x+b}}$**, com** $\boldsymbol{a > 0 \text{ e } a \neq 0}$**.**

SUGESTÃO DE ATIVIDADE

ATIVIDADE 01 –

Escreva as afirmações necessárias quando possível para encontrar a representação algébrica dado o gráfico da mesma.

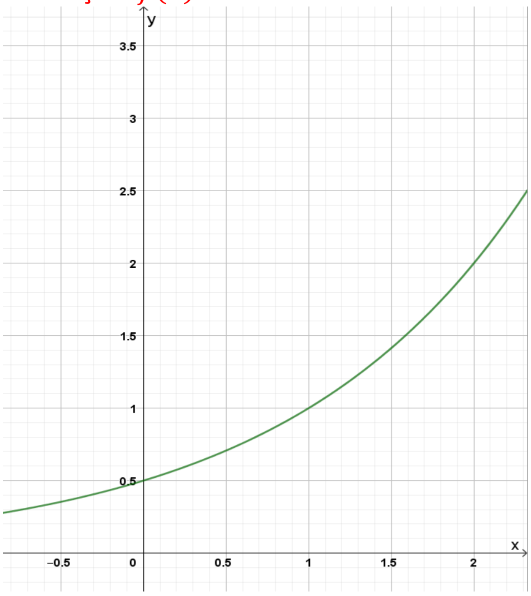
Resposta pessoal: Espera-se que o estudante enuncie as 4 afirmações descrita no conceito básico.

____
____
____
____
____

ATIVIDADE 02 –

Encontre a representação algébrica da representação gráfica a seguir.

Resolução: $f(x) = 2^{x-1}$.

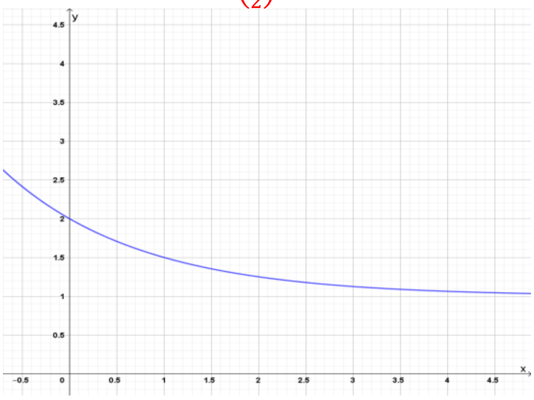


____
____
____
____
____

ATIVIDADE 03 –

Encontre a representação algébrica da representação gráfica a seguir.

Resolução: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$.



____
____

MOMENTO 05 - MATEMÁTICA

CONCEITO

ATENÇÃO!

FUNÇÃO EXPONENCIAIS: UMA SITUAÇÃO DESCRITA EM UM TEXTO

Conceitos Básicos

As representações algébricas ou gráficas não são a única maneira de representar uma função exponencial. Uma situação representando uma função exponencial também pode vir sob a forma de texto. Por exemplo:

Uma instituição bancária oferece um rendimento de 9% ao ano para depósitos feitos numa certa modalidade de aplicação financeira de juros compostos. Um cliente deste banco deposita R\$ 5 000,00 reais nessa aplicação. Ao final de n anos, o montante que esse cliente terá em reais, relativo a esse depósito, é:

$$\mathbf{5000 \times 1,15^{n}}$$

Ou poderia ser também

Próxima da superfície terrestre, a pressão atmosférica **(P),** dada em **atm,** varia aproximadamente conforme o modelo matemático: a pressão atmosférica é igual a uma pressão inicial equivalente a 1 (atm) multiplicada por nove décimos elevado a potência de h que representa a altura em quilômetros, ou seja, $P = P_0(0{,}9)^h$, onde P_0 = 1 (atm) e h é altura dada em quilômetros.

SUGESTÃO DE ATIVIDADE

ATIVIDADE 01 –

Escreva a representação algébrica referente a cada uma das situações a seguir.

a) Um capital de C foi aplicado à taxa de i% ao mês durante determinado tempo. Qual o montante gerado?

Resolução: $M = C.(1+i)^t$

____
____
____
____

b) O capital de R$ 1 600,00 foi aplicado à taxa de 1,7% ao mês durante determinado tempo. Qual o montante gerado?

Resolução:

$M = 1600.(1+0{,}017)^t \rightarrow M = 1600.1{,}017^t$.

____
____
____
____

ATIVIDADE 02 –

Leia o texto a seguir.

A Lei de resfriamento (ou do aquecimento) de Newton afirma que a diferença de temperatura entre um objeto e o meio que o cerca decai como uma função exponencial. Mais especificamente, se a temperatura inicial do objeto é igual a A e a temperatura do meio é M, então, após um instante t a diferença de temperatura entre o objeto e o meio é dada por $\boldsymbol{f(t) - M = Kb^t}$, **em que** $\boldsymbol{K = A - M}$ **e** $\boldsymbol{b}$ é uma constante que depende do material de que é constituído o objeto. Se $\boldsymbol{b > 1}$ então a temperatura do objeto tende a aumentar, se $\boldsymbol{b < 1}$, ele resfriará. Por exemplo: Uma panela de água fervendo é levada a uma sala em que o ar está a uma temperatura de 20 graus Centígrados. Após uma hora a sua temperatura é de 60 graus. Qual a função exponencial que representa esta situação?

Resolução: $f(t) - 20 = 80\left(\frac{1}{2}\right)^t$.

____
____
____
____
____
____

MOMENTO 06 - MATEMÁTICA

CONCEITO

ATENÇÃO!

FUNÇÃO EXPONENCIAIS: APRESENTADAS EM TABELAS E/OU GRÁFICOS

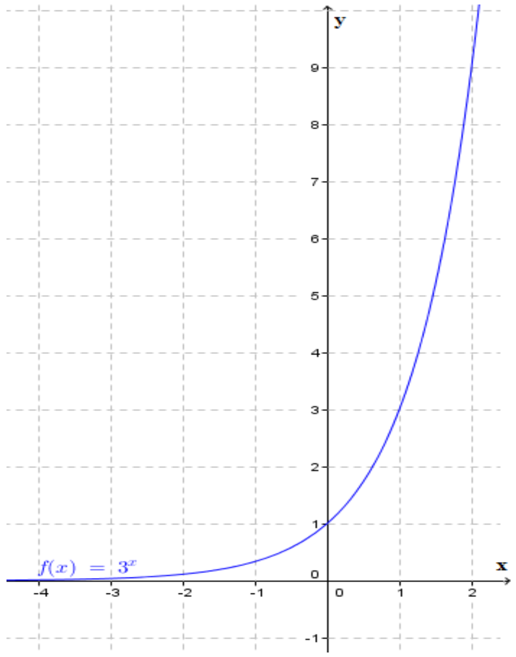
Conceitos Básicos

A função exponencial $(\boldsymbol{f(x) = a^x, a > 0 \text{ e } a \neq 1})$ serve para representar situações em que ocorrem grandes variações, por isso o uso de tabelas e gráficos ajuda a visualizar e entender melhor essas grandes variações. A seguir apresentamos dois exemplos que nos ajudarão a perceber que as representações por tabelas e gráficos é mais eficiente do que a algébrica para visualizar as variações.

➢ Função exponencial crescente – $(\boldsymbol{a > 1})$

Observe os domínios, as respectivas imagens e o gráfico da função: $\boldsymbol{f(x) = 3^x}$

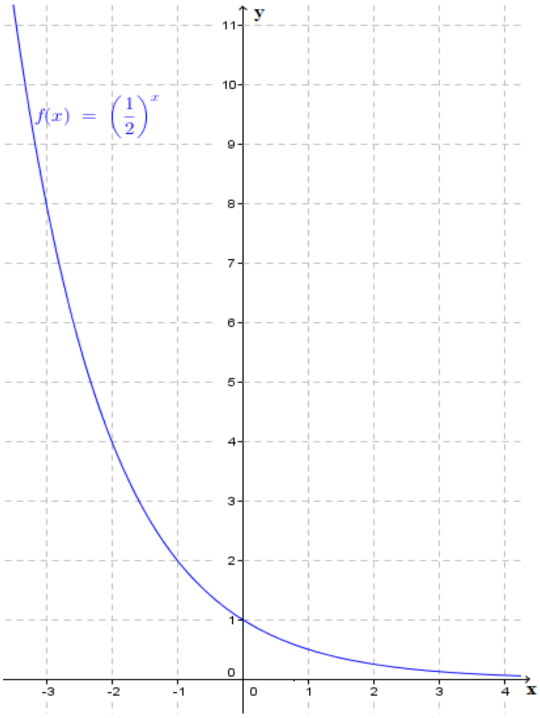
x	$f(x) = 3^x$
-4	$f(-4) = 3^{-4} = \frac{1}{81}$
-3	$f(-3) = 3^{-3} = \frac{1}{27}$
-2	$f(-2) = 3^{-2} = \frac{1}{9}$
-1	$f(-1) = 3^{-1} = \frac{1}{3}$
0	$f(0) = 3^0 = 1$
1	$f(1) = 3^1 = 3$
2	$f(2) = 3^2 = 9$
3	$f(3) = 3^3 = 27$
4	$f(4) = 3^4 = 81$



➢ Função exponencial decrescente – $(0 < a < 1)$

Observe agora a tabela de valores pertencentes à função $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e seu respectivo gráfico:

x	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
-4	$f(-4) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16$
-3	$f(-3) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$
-2	$f(-2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$
-1	$f(-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$
0	$f(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{0} = 1$
1	$f(1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1} = \frac{1}{2}$
2	$f(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \frac{1}{4}$
3	$f(3) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3} = \frac{1}{8}$
4	$f(4) = \left(\frac{1}{2}\right)^{4} = \frac{1}{16}$



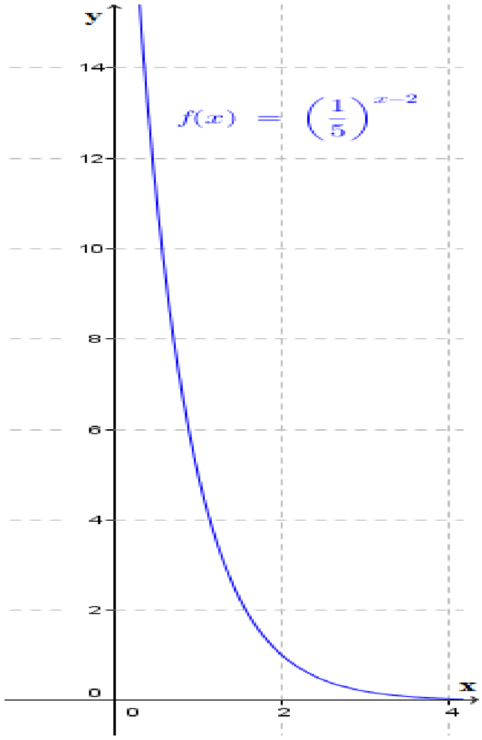
SUGESTÃO DE ATIVIDADE

ATIVIDADE 01 –

Construa a tabela e o gráfico das seguintes funções:

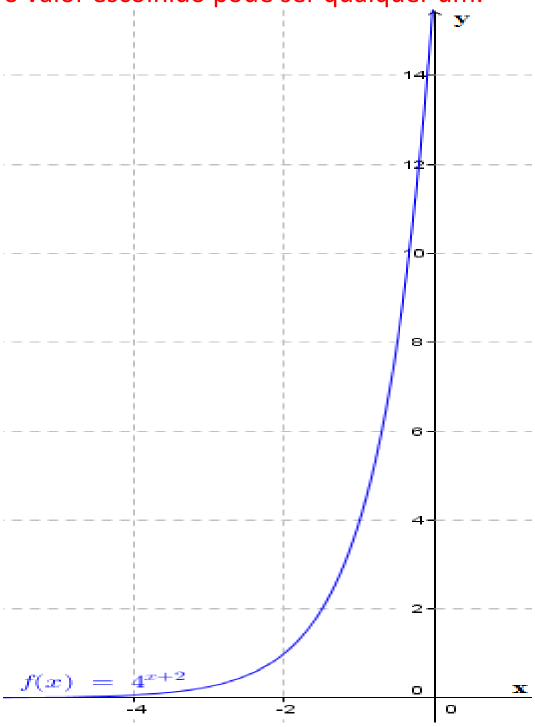
a) $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-2}$

Resolução: a tabela é resposta pessoal, pois o valor escolhido pode ser qualquer um.



b) $\boldsymbol{f(x) = 4^{x+2}}$

Resolução: a tabela é resposta pessoal, pois o valor escolhido pode ser qualquer um.

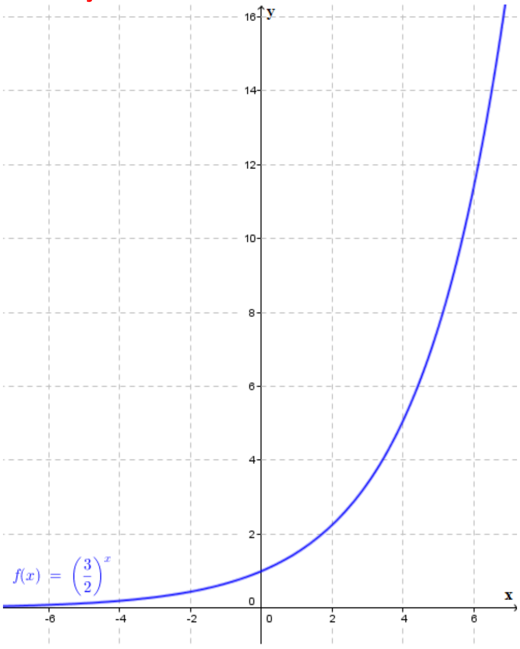


ATIVIDADE 02 –

A tabela, a seguir, se refere a alguns valores de uma função exponencial. Construa o gráfico que se refere a esta função.

x	$f(x)$
-4	$f(-4) = \left(\frac{3}{2}\right)^{-4} = \frac{16}{81}$
-3	$f(-3) = \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} = \frac{8}{27}$
-2	$f(-2) = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \frac{4}{9}$
-1	$f(-1) = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{3}$
0	$f(0) = \left(\frac{3}{2}\right)^{0} = 1$
1	$f(1) = \left(\frac{3}{2}\right)^{1} = \frac{3}{2}$
2	$f(2) = \left(\frac{3}{2}\right)^{2} = \frac{9}{4}$
3	$f(3) = \left(\frac{3}{2}\right)^{3} = \frac{27}{8}$
4	$f(4) = \left(\frac{3}{2}\right)^{4} = \frac{81}{16}$

Resolução:



MOMENTO 07 - MATEMÁTICA

CONCEITO

ATENÇÃO!

FUNÇÃO EXPONENCIAIS: PROBLEMAS EM TABELAS / GRÁFICOS

Conceitos Básicos

As funções exponenciais são bastante utilizadas para solucionar situações recorrentes do nosso cotidiano na engenharia, na biologia, na geologia, nas finanças etc.

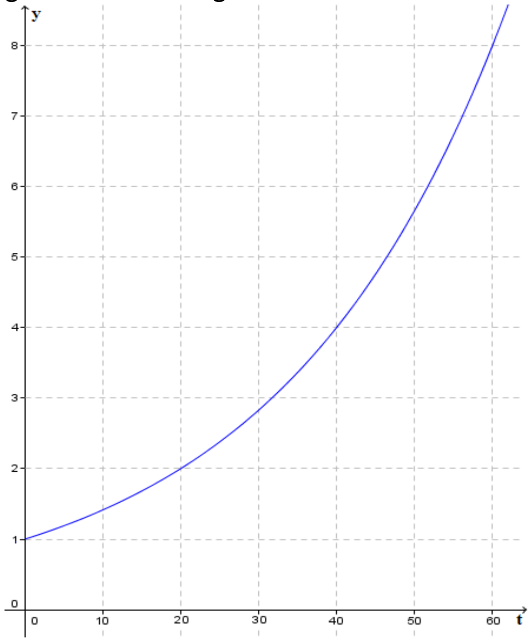
A tabela, a seguir, representa uma situação observada em situação abusiva de uma cobrança de uma dívida no cartão de credito

Tempo em meses	Valor em milhares de reais
0	1
20	2
40	4
60	8
80	16
100	32
120	64
140	128

Analisando a tabela exposta chegamos as seguintes conclusões:

- O valor da dívida aumenta com o passar do tempo;
- O valor da dívida duplicasse sempre no mesmo período de tempo;
- O período de tempo de duplicação do valor da dívida é 20 meses;
- A função que expressa esta relação é dada por: $\boldsymbol{f(t) = 2^t}$, onde t representa o tempo em meses.

Esta mesma situação poderia ser apresentada através de uma representação gráfica como a seguir.



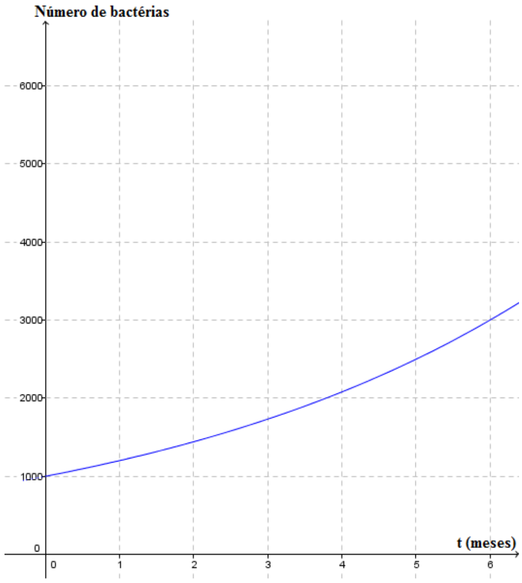
Pela análise desse gráfico também chegaríamos às mesmas conclusões:

- O valor da dívida aumenta com o passar do tempo;
- O valor da dívida duplicasse sempre no mesmo período de tempo;
- O período de tempo de duplicação do valor da dívida é 20 meses;
- A função que expressa esta relação é dada por: $\boldsymbol{f(t) = 2^t}$, onde $\boldsymbol{t}$ representa o tempo em meses.

SUGESTÃO DE ATIVIDADE

ATIVIDADE 01 –

Em uma pesquisa realizada em laboratório, obteve-se o gráfico a seguir.



Sabendo que esse gráfico indica o crescimento do número de indivíduos de uma cultura de bactérias ao longo de seis meses, responda:

a) O número de bactérias no início da pesquisa?

Resolução: 1000.

b) número de bactérias no final da pesquisa (6 meses)?

Resolução: 3000.

c) Supondo que a função que representa esta situação é da forma $f(t) = k \cdot a^t$, encontre os valores de k e a.

Resolução: $1000 = k \cdot a^0 \rightarrow 1000 = k \rightarrow k = 1000$

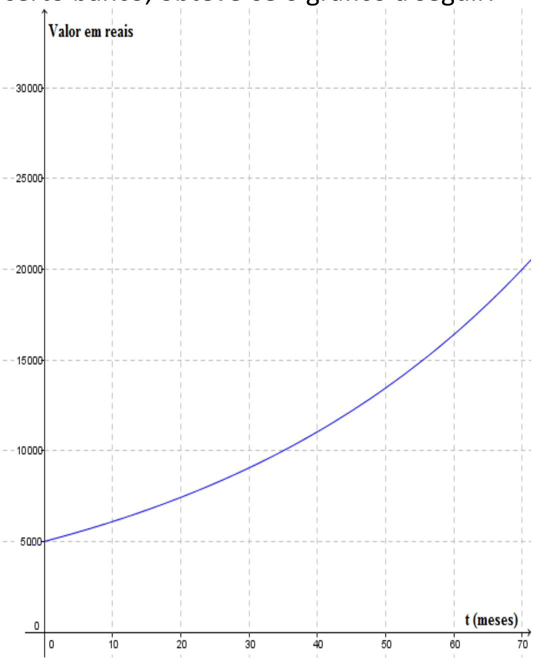
$$3000 = 1000 \cdot a^6$$
$$3 = a^6$$
$$a = \sqrt[6]{3}$$

d) Encontre o número de bactérias após 2, 3 e 4 meses?

Resolução: $f(2) = 1000 \cdot 3^{\frac{2}{6}} = 1.442,25$; $f(3) = 1000 \cdot 3^{\frac{3}{6}} = 1.732,05$ e $f(4) = 1000 \cdot 3^{\frac{4}{6}} = 2.080,08$.

ATIVIDADE 02 –

Em uma aplicação financeira realizada em certo banco, obteve-se o gráfico a seguir.



Sabendo que esse gráfico indica um investimento bancário ao longo de setenta meses, responda.

a) O valor inicial aplicado?

Resolução: 5000.

b) O valor acumulado da aplicação no final dos setentas meses?

Resolução: 20 000

c) Supondo que a função que representa esta situação é da forma $f(t) = k \cdot a^t$, encontre os valores de k e a.

Resolução: $5000 = k \cdot a^0 \;\rightarrow\; 5000 = k \;\rightarrow\; k = 5000$

$$20\,000 = 5000 \cdot a^{70}$$
$$4 = a^{70}$$
$$a = \sqrt[70]{4}$$

d) Encontre o número de bactérias após 20, 30 e 40 meses?

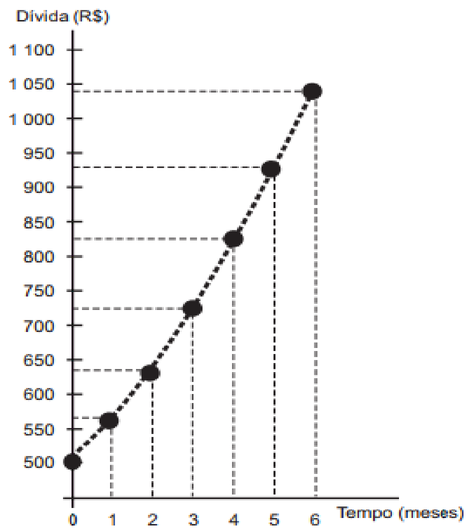
Resolução: $f(20) = 5000 \cdot 4^{\frac{20}{70}} = 7\,429{,}97$; $f(30) = 5000 \cdot 4^{\frac{30}{70}} = 9\,057{,}24$ e $f(40) = 5000 \cdot 4^{\frac{40}{70}} = 11\,040{,}90$.

MOMENTO ENEM

QUESTÃO 01 – (ENEM/2013-Adaptada)

Leia o texto a seguir.

Um trabalhador possui um cartão de crédito que, em determinado mês, apresenta o saldo devedor a pagar no vencimento do cartão, mas não contém parcelamentos a acrescentar em futuras faturas. Nesse mesmo mês, o trabalhador é demitido. Durante o período de desemprego, o trabalhador deixa de utilizar o cartão de crédito e também não tem como pagar as faturas, nem a atual nem as próximas, mesmo sabendo que, a cada mês, incidirão taxas de juros e encargos por conta do não pagamento da dívida. Ao conseguir um novo emprego, já completados 6 meses de não pagamento das faturas, o trabalhador procura renegociar sua dívida. O gráfico mostra a evolução do saldo devedor.



Com base no gráfico, podemos constatar que o saldo devedor inicial, a parcela mensal de juros e a taxa de juros são

(A) R$ 500, constante e inferior a 10% ao mês.
(B) R$ 560, variável e inferior a 10% ao mês.
(C) R$ 500, variável e superior a 10% ao mês.
(D) R$ 560, constante e superior a 10% ao mês.
(E) R$ 500, variável e inferior a 10% ao mês.

QUESTÃO 02 – (ENEM/2015-Adaptada)
Leia o texto a seguir.

O acréscimo de tecnologias no sistema produtivo industrial tem por objetivo reduzir custos e aumentar a produtividade. No primeiro ano de funcionamento, uma indústria fabricou 8000 unidades de um determinado produto. No ano seguinte, investiu em tecnologia adquirindo novas máquinas e aumentou a produção em 50%. Estima-se que esse aumento percentual se repita nos próximos anos, garantindo um crescimento anual de 50%. Considere P a quantidade anual de produtos fabricados no ano t de funcionamento da indústria. Se a estimativa for alcançada, qual é a expressão que determina o número de unidades produzidas P em função e t, para t ≥ 1?

(A) $P(t) = 0{,}5 \cdot t^{-1} + 8000$
(B) $P(t) = 50 \cdot t^{-1} + 8000$
(C) $P(t) = 4000 \cdot t^{-1} + 8000$
(D) $P(t) = 8000 \cdot (0{,}5)^{t-1}$
(E) $P(t) = 8000 \cdot (1{,}5)^{t-1}$

QUESTÃO 03 – (ENEM/2015-Adaptada)
Leia o texto a seguir.

O sindicato de trabalhadores de uma empresa sugere que o piso salarial da classe seja de **R$ 1800,** propondo um aumento percentual fixo por cada ano dedicado ao trabalho. A expressão que corresponde à proposta salarial (s), em função do tempo de serviço **(t),** em anos, é **s(t) = 1800 (1,03)t.**

De acordo com a proposta do sindicato, o salário de um profissional de empresa com 2 anos de tempo de serviço será, em reais,

(A) 7416,00.
(B) 3819,24.
(C) 3709,62.
(D) 3708,00.
(E) 1909,62.

QUESTÃO 04 – (ENEM/2020-Adaptada)
Leia o texto a seguir.

Um laboratório realizou um teste para calcular a velocidade de reprodução de um tipo de bactéria. Para tanto, realizou um experimento para observar a reprodução de uma quantidade x dessas bactérias por um período de duas horas. Após esse período, constava no habitáculo do experimento uma população de 189 440 da citada bactéria. Constatou-se, assim, que a população de bactérias dobrava a cada 0,25 hora.

A quantidade inicial de bactérias era de

(A) 370.
(B) 740.
(C) 1 480.
(D) 11 840.
(E) 23 680.

QUESTÃO 05 – (ENEM/2020-Adaptada)
Leia o texto a seguir.

Enquanto um ser está vivo, a quantidade de carbono 14 nele existente não se altera. Quando ele morre, essa quantidade vai diminuindo. Sabe-se que a meia-vida do carbono 14 é de 5 730 anos, ou seja, num fóssil de um organismo que morreu há 5 730 anos haverá metade do carbono 14 que existia quando ele estava vivo. Assim, cientistas e arqueólogos usam a seguinte fórmula para saber a idade de um fóssil encontrado: **Q(t) = Q0 . 2-t/5730** em que t é o tempo, medido em ano, **Q(t)** é a quantidade de carbono 14 medida no instante t e Q0 é a quantidade de carbono 14 no ser vivo correspondente. Um grupo de arqueólogos, numa de suas expedições, encontrou 5 fósseis de espécies conhecidas e mediram a quantidade de carbono 14 neles existente. Na tabela temos esses valores juntamente com a quantidade de carbono 14 nas referidas espécies vivas.

Fóssil	Q_0	$Q(t)$
1	128	32
2	256	8
3	512	64
4	1 024	512
5	2 048	128

O fóssil mais antigo encontrado nessa expedição foi

(A) 1.
(B) 2.
(C) 3.
(D) 4.
(E) 5.

QUESTÃO 06 – (ENEM/2013-Adaptada)
Leia o texto a seguir.

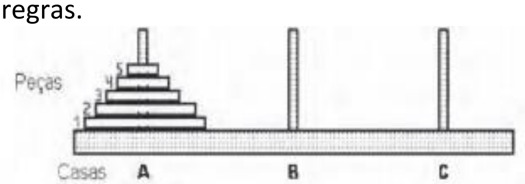
Em um experimento, uma cultura de bactérias tem sua população reduzida pela metade a cada hora, devido à ação de um agente bactericida.

Neste experimento, o número de bactérias em função do tempo pode ser modelado por uma função do tipo

(A) afim.
(B) seno.
(C) cosseno.
(D) logarítmica crescente.
(E) exponencial.

QUESTÃO 07 – (ENEM/2011-Adaptada)
Leia o texto a seguir.

A torre de Hanói é um jogo que tem o objetivo de mover todos os discos de uma haste para outra, utilizando o menor número possível de movimento, respeitando-se as regras.



As regras são:
1. um disco maior não pode ser colocado sobre um disco menor;
2. pode-se mover um único disco por vez;
3. um disco deve estar sempre em uma das três hastes ou em movimento.

Disponível em: http://www.realidadevirtual.com.br. Acesso em: 28 abr. 2010 (adaptado). Disponível em: http://www.imeusp.br. Acesso em: 28 abr. 2010 (adaptado).

Usando a torre de Hanói e baseando-se nas regras do jogo, podemos montar uma tabela entre o número de peças (X) e o número mínimo de movimentos (Y):

Número de peças	Número mínimo de movimentos
1	1
2	3
3	7
4	15

A relação entre $(\boldsymbol{X})$ **e** $(\boldsymbol{Y})$ é

(A) $Y = 2^X - 1$
(B) $Y = 2^{X-1}$
(C) $Y = 2^X$
(D) $Y = 2X - 1$
(E) $Y = 2X - 4$

QUESTÃO 08 – (ENEM/2014-Adaptada)
Leia o texto a seguir.

Pesquisas indicam que o número de bactérias *X* é duplicado a cada quarto de hora. Um aluno resolveu fazer uma observação para verificar a veracidade dessa afirmação. Ele usou uma população inicial de 105 bactérias *X* e encerrou a observação ao final de uma hora.
Suponha que a observação do aluno tenha confirmado que o número de bactérias *X* se duplica a cada quarto de hora.

Após uma hora do início do período de observação desse aluno, o número de bactérias *X* foi de

(A) $2^{-2} \cdot 10^5$
(B) $2^{-1} \cdot 10^5$
(C) $2^2 \cdot 10^5$
(D) $2^3 \cdot 10^5$
(E) $2^4 \cdot 10^5$

CAPÍTULO 02 – MOMENTO 01- MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

COMPONENTE CURRICULAR

MATEMÁTICA

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA

Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

HABILIDADE DA BNCC

(EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM DC-GOEM

(GO-EMMAT303C) Comparar situações que envolvem a ideia de juros (simples ou compostos) analisando os resultados e a adequação das soluções propostas para construir argumentação consistente e tomar decisões acerca de situações relacionadas à educação financeira, mercado (cotidiano e de trabalho) etc.

OBJETOS DE CONHECIMENTO

Conceitos de Matemática Financeira.

Juros simples e juros compostos. Função polinomial do 1º grau associado a juros simples e função exponencial associado a juros compostos.

MOMENTO 01 - MATEMÁTICA

Imersão Curricular

CONCEITO

ATENÇÃO!

SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO

Amortização é o mesmo que redução da dívida. Amortizar é pagar uma parte da dívida para que ela reduza de tamanho até a sua eliminação. Porém, em toda dívida, há cobrança de juros. Assim, para amortizar uma dívida, é necessário que o pagamento seja maior que os juros cobrados no período. Ou seja, o valor amortizado é o que sobra do pagamento depois de descontados os juros.

No Brasil, os mercados comercial e financeiro adotam diversos sistemas de amortização de empréstimos. Eles diferem pelo critério de devolução do valor atual (PV) e pelo cálculo e pagamento dos juros (J). Nos sistemas de amortização a serem estudados, os juros serão calculados sempre sobre o saldo devedor. Isto significa que consideraremos apenas o regime de capitalização composta.

Para uma melhor compreensão, daremos os principais conceitos de uso corrente nas operações de empréstimos e financiamentos.

Definições Importantes

✓ **Mutuante ou credor:** aquele que fornece o empréstimo;

✓ **Mutuário ou devedor:** aquele que recebe o empréstimo;

✓ **Amortizar uma dívida:** significa diminuir gradualmente, até a extinção total, o principal de uma dívida;

✓ **Parcelas de amortização:** corresponde às parcelas de devolução do capital emprestado. Indicaremos por A;

✓ **Prazo de amortização:** é o intervalo de tempo durante o qual são pagas as amortizações;

✓ **Prestação:** é a soma da amortização com os juros e outros encargos, pagos em dado período. Indicaremos por R;

✓ **Planilha:** é um quadro, padronizado ou não, onde são colocados os valores referentes ao empréstimo, ou seja, o cronograma dos valores de recebimento e de pagamentos;

✓ **Saldo devedor:** é o estado da dívida, ou seja, do débito, em um determinado instante de tempo t. Indicaremos por $(PV)_t$;

- ✓ **Período de amortização:** é o intervalo de tempo existente entre duas amortizações sucessivas.

Dentre os principais e mais utilizados sistemas de amortização de empréstimos, abordaremos o sistema de amortização:

- ✓ Sistema de Amortização Francês;
- ✓ Sistema de Amortização Constante;
- ✓ Sistema de Amortização Misto;
- ✓ Sistema Americano de Amortização.

SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO FRANCÊS (SAF)

O Sistema Francês foi desenvolvido pelo matemático e físico belga Simon Stevin no século XVI. Foi utilizado pelo economista e matemático inglês Richard Price, no século XVIII, no cálculo previdenciário inglês da época, e ficou conhecido no Brasil como Sistema Price.

O Sistema Francês ou Sistema Price é o mais utilizado pelas instituições financeiras e pelo comércio em geral. O empréstimo é pago em prestações periódicas iguais e postecipadas. Cada prestação é constituída pela soma da amortização do principal com os juros do período. A amortização é obtida por diferença entre os valores da prestação e os juros do período. Os juros decrescem com o tempo. O principal no início de cada período vai se tornando cada vez menor e as amortizações vão crescendo de modo que a soma dessas parcelas permaneça constante ao longo do tempo. A amortização é crescente em progressão geométrica de razão igual a $(1 + i)$.

Prestação:

$$R = PV\frac{i}{[1-(1+i)^{-n}]}$$

Saldo devedor:

$$(PV)_t = R\frac{(1+i)^{n-t}-1}{i(1+i)^{n-t}}$$

Parcela de juro:

$$J_t = i \cdot (PV)_{(t-1)}$$

Amortização:

$$A_t = R - J_t$$

Exemplo:

Um financiamento de R$ 20 000,00 deverá ser amortizado, através do Sistema Francês de Amortização, em 8 prestações mensais, com juros compostos de 2% ao mês.

a) Calcule o valor da prestação;

Resolução:

$PV = \text{R\$ } 20\,000{,}00$

$i = 0{,}02 \ ao \ mês.$

$n = 8 \ meses$

$$R = PV\frac{i}{[1-(1+i)^{-n}]}$$

$$R = 20\,000 \cdot \frac{0{,}02}{[1-(1+0{,}02)^{-8}]}$$

$$R = 20\,000 \cdot (0{,}136510)$$

$$R = R\$\ 2\,730{,}20$$

b) Calcule o saldo devedor após o pagamento da terceira prestação;

Resolução:

$$(PV)_t = R\frac{(1+i)^{n-t}-1}{i(1+i)^{n-t}}$$

Assim, o saldo devedor após o pagamento da terceira prestação será:

$$(PV)_3 = 2\,730{,}20 \cdot \frac{(1+0{,}02)^{8-3}-1}{i(1+i)^{8-3}}$$

$$(PV)_3 = 2\,730{,}20 \cdot (4{,}713460)$$

$$(PV)_3 = R\$\ 12\,868{,}69$$

c) Calcule as parcelas de juro e de amortização da quinta prestação;

Resolução:

A parcela de juros da quinta prestação é dada por:

$$J_5 = i \cdot (PV)_4$$

$$J_5 = 0{,}02(10\,395{,}86)$$

$$J_5 = R\$\ 207{,}92$$

E a amortização da quinta prestação é:

$$A_5 = R - J_5$$

$$A_5 = 2\,730{,}20 - 207{,}92$$

$$A_5 = R\$\ 2\,522{,}28$$

d) Faça uma planilha com o desenvolvimento mensal das prestações, os juros pagos, a evolução das quotas de amortização e o saldo devedor.

Resolução:

n	Prestações R	Juros $J_t = i \cdot (PV)_{(t-1)}$	Amortizações $A_t = R - J_t$	Saldo Devedor $(PV)_{(t)} = (PV)_{(t-1)} - A_t$
0				20 000,00
1	2 730,20	400,00	2 330,20	17 669,80
2	2 730,20	353,40	2 376,80	15 293,00
3	2 730,20	305,86	2 424,34	12 868,66
4	2 730,20	257,37	2 472,83	10 395,83
5	2 730,20	207,92	2 522,28	7 873,55
6	2 730,20	157,47	2 572,73	5 300,82
7	2 730,20	106,02	2 624,18	2 676,63
8	2 730,20	53,53	2 676,67	−0,03
Total	21 841,60	1 841,57	20 000,03	–

SUGESTÃO DE ATIVIDADE

ATIVIDADE 01 –

Um financiamento de R$ 40 000,00 deverá ser amortizado, através do Sistema Francês de Amortização, em 8 prestações mensais, com juros compostos de 2% ao mês.

a) Calcule o valor da prestação;

Resolução:

PV = R$ 40 000.00

i = 0,02 $ao\ mês$.

n = 8 $meses$

$$R = PV \frac{i}{[1-(1+i)^{-n}]}$$

$$R = 40\,000 \cdot \frac{0{,}02}{[1-(1+0{,}02)^{-8}]}$$

$$R = 40\,000 \cdot (0{,}136510)$$

$$R = R\$\ 5\,460{,}40$$

b) Calcule o saldo devedor após o pagamento da terceira prestação;

Resolução:

$$(PV)_t = R\frac{(1+i)^{n-t}-1}{i(1+i)^{n-t}}$$

Assim, o saldo devedor após o pagamento da terceira prestação será:

$$(PV)_3 = 5\,460{,}40 \cdot \frac{(1+0{,}02)^{8-3}-1}{i(1+i)^{8-3}}$$

$$(PV)_3 = 5\,460{,}40 \cdot (4{,}713460)$$

$$(PV)_3 = R\$\ 25\,735{,}49$$

c) Calcule as parcelas de juro e de amortização da quinta prestação;

Resolução:

A parcela de juros da quinta prestação é dada por:

$$J_5 = i \cdot (PV)_4$$

$$J_5 = 0{,}02(20\,792)$$

$$J_5 = R\$\ 415{,}84$$

E a amortização da quinta prestação é:

$$A_5 = R - J_5$$

$$A_5 = 5\,460{,}40 - 415{,}84$$

$$A_5 = R\$\ 5\,044{,}56$$

d) Faça uma planilha com o desenvolvimento mensal das prestações, os juros pagos, a evolução das quotas de amortização e o saldo devedor.

n	Prestações R	Juros $J_t = i \cdot (PV)_{(t-1)}$	Amortizações $A_t = R - J_t$	Saldo Devedor $(PV)_{(t)} = (PV)_{(t-1)} - A_t$
0				40 000,00
1	5 460,40	800,00	4660,40	35339,6
2	5 460,40	706,80	4753,60	30586
3	5 460,40	611,72	4848,68	25737,32
4	5 460,40	514,74	4945,66	20791,66
5	5 460,40	415,84	5044,56	15747,1
6	5 460,40	314,94	5145,46	10601,64
7	5 460,40	212,04	5248,36	5353,28
8	5 460,40	107,06	5353,34	– 0,06
Total	43 683,20	3 683,14	40 000,06	-

MOMENTO 02 - MATEMÁTICA

Imersão Curricular

CONCEITO

ATENÇÃO!

Sistema de Amortização Constante (SAC)

No Sistema de Amortização Constante, as parcelas de amortização do principal são sempre iguais (ou constantes). O valor da amortização A é calculado através da divisão do capital emprestado PV pelo número de amortizações n. Os juros são calculados, a cada período, multiplicando-se a taxa de juros contratada pelo saldo devedor existente sobre o período anterior, assumindo valores decrescentes nos períodos. A prestação, a cada período, é igual à soma da amortização e dos encargos financeiros (juros, comissões, entre outros), sendo periódica, sucessiva e decrescente em progressão aritmética, de razão igual ao produto da taxa de juros pela parcela de amortização.

Assim,

$$A = \frac{PV}{n}$$

O saldo devedor de ordem t é dado por:

$$(PV)_t = (PV)_{(t-1)} - A$$

A parcela de juros de ordem t é:

$$J_t = i \cdot (PV)_{(t-1)}$$

Exemplo:

O financiamento de R$ 20 000,00 deverá ser amortizado, através do Sistema de Amortização Constante, em 8 prestações mensais, com juros compostos de 2% ao mês. Faça uma planilha com o desenvolvimento mensal das prestações, os juros pagos, a evolução das quotas de amortização e o saldo devedor.

Resolução:

PV = R$20 000,00

i = 0,02 $ao\ mês$.

n = 8 $meses$

Calculemos a parcela de amortização:

$$A = \frac{20\,000}{8}$$

$$A = R\$\ 2\,500{,}00$$

Portanto, teremos a seguinte planilha:

n	Prestações $R_t = J_t + A$	Juros $J_t = i \cdot (PV)_{(t-1)}$	Amortizações A	Saldo Devedor $(PV)_{(t)} = (PV)_{(t-1)} - A_t$
0				20 000,00
1	2 900,00	400,00	2 500,00	17 500,00
2	2 850,00	350,00	2 500,00	15 000,00
3	2 800,00	300,00	2 500,00	12 500,00
4	2 750,00	250,00	2 500,00	10 000,00
5	2 700,00	200,00	2 500,00	7 500,00
6	2 650,00	150,00	2 500,00	5 000,00
7	2 600,00	100,00	2 500,00	2 500,00
8	2 550,00	50,00	2 500,00	0,00
Total	21 800,00	1 800,00	20 000,00	–

SUGESTÃO DE ATIVIDADE

ATIVIDADE 01 –

O financiamento de R$ 40 000,00 deverá ser amortizado, através do Sistema de Amortização Constante, em 8 prestações mensais, com juros compostos de 2% ao mês. Faça uma planilha com o desenvolvimento mensal das prestações, os juros pagos, a evolução das quotas de amortização e o saldo devedor.

Resolução:

PV = R$ 40 000,00

i = 0,02 $ao\ mês$.

n = 8 $meses$

Calculemos a parcela de amortização:

$$A = \frac{40\,000}{8}$$

$$A = R\$\ 5\,000{,}00$$

Portanto, teremos a seguinte planilha:

n	Prestações $R_t = J_t + A$	Juros $J_t = i \cdot (PV)_{(t-1)}$	Amortizações A	Saldo Devedor $(PV)_{(t)} = (PV)_{(t-1)} - A_t$
0				40 000,00
1	5 800,00	800,00	5 000,00	35 000,00
2	5 700,00	700,00	5 000,00	30 000,00
3	5 600,00	600,00	5 000,00	25 000,00
4	5 500,00	500,00	5 000,00	20 000,00
5	5 400,00	400,00	5 000,00	15 000,00
6	5 300,00	300,00	5 000,00	10 000,00
7	5 200,00	200,00	5 000,00	5 000,00
8	5 100,00	100,00	5 000,00	0,00
Total	43 600,00	3 600,00	40 000,00	–

MOMENTO 03 - MATEMÁTICA

Imersão Curricular

CONCEITO

ATENÇÃO!

SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO MISTO (SAM)

O Sistema de Amortização Mista, conforme a própria denominação, é um misto do Sistema de Amortização

Constante (SAC) com o Sistema de Amortização Francês (SAF). É também conhecido de Sistema de Amortização Crescente (SACRE). Esse misto dos dois sistemas se caracteriza pelo fato de a prestação ser igual à média aritmética entre as prestações dos dois sistemas. Sendo as prestações do SAM as médias aritméticas dos dois sistemas, SAC e SAF, respectivamente, os juros também serão as médias aritméticas dos juros correspondentes dos dois sistemas, a cota de amortização serão as médias aritméticas correspondentes e o saldo, bem como o saldo devedor. Além disso, os juros são decrescentes e as cotas de amortizações crescentes, permitindo que a dívida seja paga mais rapidamente. No SACRE, a partir de um determinado período, durante o prazo de financiamento, a prestação tende a cair continuamente até o final do empréstimo. Exatamente por isto, o percentual de comprometimento da renda neste tipo de mecanismo de amortização tende a ser mais alto, em cerca de 30%, pois, no decorrer do prazo do financiamento, as prestações devem cair e com isto diminuirá o grau de comprometimento da renda.

Exemplo:

Na compra de um sítio, Roberta quer financiar a importância de R$ 25 000,00 em uma instituição financeira que cobra juros compostos de 5% ao mês. Esse empréstimo será amortizado pelo sistema SAM, em 5 prestações mensais e consecutivas, vencendo a primeira um mês após a compra. Elabore a planilha de financiamento

Resolução:

$$PV = \text{R\$ } 25\,000{,}00$$
$$i = 0{,}05 \text{ } ao \text{ } mês.$$
$$n = 5 \text{ } meses$$

Como o sistema SAM depende dos sistemas SAC e SAF, vamos calcular o valor das prestações pelo sistema SAC:

$$A = \frac{25\,000}{5}$$
$$A = R\$\,5000{,}00$$

e

$$J_t = i \cdot (PV)_{(t-1)}$$
$$J_{SAC1} = 0{,}05 \cdot (25\,000)$$
$$J_{SAC1} = R\$\,1\,250{,}00$$

Assim, a primeira prestação será

$$R_{SAC1} = A + J_{SAC1}$$
$$R_{SAC1} = 5\,000 + 1\,250$$
$$R_{SAC1} = R\$\,6\,250{,}00$$

Já o saldo devedor será

$$(\text{PV})_{SAC1} = PV - A$$
$$(\text{PV})_{SAC1} = 25\,000 - 5\,000$$
$$(\text{PV})_{SAC1} = R\$\,20\,000{,}00$$

Para o cálculo da segunda prestação, segue que

$$J_{SAC2} = i \cdot (PV)_{SAC2}$$
$$J_{SAC2} = 0{,}05 \cdot (20\,000)$$
$$J_{SAC2} = R\$\,1\,000{,}00$$

e

$$R_{SAC2} = A + J_{SAC2}$$
$$R_{SAC2} = 5\,000 + 1\,000$$
$$R_{SAC2} = R\$\,6\,000{,}00$$

O saldo devedor ficar

$$(\text{PV})_{SAC2} = PV - A$$
$$(\text{PV})_{SAC2} = 20\,000 - 5\,000$$
$$(\text{PV})_{SAC2} = R\$\,15\,000{,}00$$

Como, no sistema SAF, as prestações são iguais, vamos determiná-las:

$$R_{SAF} = PV \frac{i}{[1 - (1 + i)^{-n}]}$$
$$R_{SAF} = 25000 \frac{0{,}05}{[1 - (1 + 0{,}05)^{-5}]}$$
$$R_{SAF} = 25000(0{,}230975)$$
$$R_{SAF} = R\$\,5\,774{,}37$$

Agora, vamos encontrar a primeira prestação no sistema SAM:

$$R_{SAM1} = \frac{R_{SAC1} + R_{SAF}}{2}$$
$$R_{SAM1} = \frac{6\,250 + 5\,774{,}37}{2}$$
$$R_{SAM1} = R\$\,6\,012{,}19$$

Agora, é a vez de calcular a amortização correspondente à primeira prestação. Sabendo que

$$J_{SAC1} = J_{SAM1}$$

$$R_{SAM1} = A_{SAM1} + J_{SAM1}$$

$$6\,012{,}19 = A_{SAM1} + 1\,250$$

$$A_{SAM1} = R\$\,4\,762{,}19$$

O saldo devedor ao final do primeiro mês será de:

$$(PV)_{SAM1} = PV - A_{SAM1}$$
$$(PV)_{SAM1} = 25\,000 - 4762{,}19$$
$$(PV)_{SAM1} = R\$\ 20\,237{,}81$$

Já calculado o saldo devedor ao final da primeira prestação, podemos calcular a segunda prestação e o juro correspondente:

$$R_{SAM2} = \frac{R_{SAC2} + R_{SAF}}{2}$$
$$R_{SAM2} = \frac{6\,000 + 5\,774{,}37}{2}$$
$$R_{SAM2} = R\$\ 5\,887{,}19$$

e

$$J_{SAM2} = i.(PV)_{SAM1}$$
$$J_{SAM2} = 0{,}05(20\,237{,}81)$$
$$J_{SAM2} = R\$\ 1\,011{,}89$$

Calculando a amortização correspondente à segunda prestação:

$$R_{SAM2} = A_{SAM2} + J_{SAM2}$$
$$5887{,}19 = A_{SAM2} + 1\,011{,}89$$
$$A_{SAM2} = R\$\ 4\,875{,}30$$

O saldo devedor ao final do segundo mês será de:

$$(PV)_{SAM2} = (PV)_{SAM1} - A_{SAM2}$$
$$(PV)_{SAM2} = 20\,237{,}81 - 4\,875{,}30$$
$$(PV)_{SAM2} = R\$\ 15\,362{,}51$$

Para determinar a terceira, quarta e quinta prestações, devemos, inicialmente, calculá-las nos dois sistemas, SAC e SAF, e depois proceder de forma análoga. Assim, a tabela do financiamento fica da seguinte forma:

n	Prestações $R_t = J_t + A$	Juros $J_t = i \cdot (PV)_{(t-1)}$	Amortizações A	Saldo Devedor $(PV)_{(t)} = (PV)_{(t-1)} - A_t$
0				25 000,00
1	6 012,19	1 250,00	4 762,19	20 237,82
2	5 887,19	1 011,89	4 875,29	15 362,52
3	5 762,19	768,13	4 994,06	10 368,46
4	5 637,19	518,42	5 118,76	5 249,70
5	5 512,19	262,48	5 249,70	0,00
Total	28 810,93	3 810,92	25 000,00	-

SUGESTÃO DE ATIVIDADE

ATIVIDADE 01 –

Na compra de um sítio, Roberta quer financiar a importância de R$ 50 000,00 em uma instituição financeira que cobra juros compostos de 5% ao mês. Esse empréstimo será amortizado pelo sistema SAM, em 5 prestações mensais e consecutivas, vencendo a primeira um mês após a compra. Elabore a planilha de financiamento

Resolução:

$PV = R\$\ 25\,000{,}00$

$i = 0{,}05\ ao\ mês.$

$n = 5\ meses$

n	Prestações $R_t = J_t + A$	Juros $J_t = i \cdot (PV)_{(t-1)}$	Amortizações A	Saldo Devedor $(PV)_{(t)} = (PV)_{(t-1)} - A_t$
0				50 000,00
1	12 024,38	2 500	9 524,38	40 475,62
2	11 774,38	2 023,78	9 750,58	30 725,04
3	11 524,38	1 536,26	9 988,12	20 736,92
4	11 274,38	1 036,84	10 237,52	10 499,40
5	11 024,38	524,96	10 499,4	0,00
Total	57621,9	7 621,84	50 000,00	

MOMENTO 04 - MATEMÁTICA

Imersão Curricular

CONCEITO

ATENÇÃO!

SISTEMA AMERICANO DE AMORTIZAÇÃO (SAA)

No Sistema Americano de Amortização, o devedor obriga-se a pagar periodicamente apenas os juros do capital emprestado e a restituí-lo, integralmente, no final do prazo estabelecido.

Os juros sempre incidem sobre o valor original da dívida. Com isso o devedor pode quitar sua dívida quando quiser. Este sistema tem como desvantagem que o pagamento de juros pode, em tese, ser perpétuo mesmo quando já se pagou o equivalente à dívida em si.

Assim,

$$J = i \cdot PV$$

Com a finalidade de evitar o desembolso violento no final do prazo combinado, o devedor procura formar, por sua conta e, mediante depósitos periódicos de parcelas constantes, um fundo de amortização, chamado Fundo de Reserva, com o qual, no fim do prazo, possa pagar a dívida sem maiores problemas. É importante notar que este fundo será constituído concomitantemente aos pagamentos dos juros do principal através do uso do Fator de Acumulação de Capital.

Este sistema não é muito utilizado no Brasil, mas é largamente utilizado nos empréstimos internacionais.

Exemplo:

Uma pessoa toma emprestada a quantia de R$15 000,00 com a condição de pagar mensalmente os juros à taxa de juros compostos de 2,5% ao mês e a restituí-la integralmente no final de 10 meses. O devedor pretende constituir um fundo de amortização com quotas mensais, calculadas à taxa de juros compostos de 2% ao mês. Calcule o dispêndio mensal e construa a planilha de reembolso.

Resolução:

$PV =$ R\$ 15 000,00

$i =$ 0,025 ao mês

$i_f =$ 0,02 ao mês

$n =$ 10 meses

Vamos calcular os juros mensais:

$$J = i \cdot PV$$
$$J = 0{,}025(15.000)$$
$$J = R\$\ 375{,}00$$

Agora, calculemos a quota mensal do fundo de amortização. Como o valor PV é pago no final, temos que

n	Cota Mensal do Fundo	Juros	Dispêndio Mensal (Parcela)	Saldo Devedor	Amortização
0				15 000,00	
1	1 369,90	375,00	1 744,90	15 000,00	0,00
2	1 369,90	375,00	1 744,90	15 000,00	0,00
3	1 369,90	375,00	1 744,90	15 000,00	0,00
4	1 369,90	375,00	1 744,90	15 000,00	0,00
5	1 369,90	375,00	1 744,90	15 000,00	0,00
6	1 369,90	375,00	1 744,90	15 000,00	0,00
7	1 369,90	375,00	1 744,90	15 000,00	0,00
8	1 369,90	375,00	1 744,90	15 000,00	0,00
9	1 369,90	375,00	1 744,90	15 000,00	0,00
10	1 369,90	375,00	1 744,90	0,00	15 000,00
Total	13 699,00	3 750,00	32 449,00	-	-

SUGESTÃO DE ATIVIDADE

ATIVIDADE 01 –

Uma pessoa toma emprestada a quantia de R$30 000,00 com a condição de pagar mensalmente os juros à taxa de juros compostos de 2,5% ao mês e a restituí-la integralmente no final de 10 meses. O devedor pretende constituir um fundo de amortização com quotas mensais, calculadas à taxa de juros compostos de 2% ao mês. Calcule o dispêndio mensal e construa a planilha de reembolso.

Resolução:

$PV =$ R\$ 30 000,00

$i =$ 0,025 ao mês

$i_f =$ 0,02 ao mês

$n =$ 10 meses

n	Cota Mensal do Fundo	Juros	Dispêndio Mensal (Parcela)	Saldo Devedor	Amortização
0				30 000,00	
1	2 739,80	750,00	3 489,80	30 000,00	0,00
2	2 739,80	750,00	3 489,80	30 000,00	0,00
3	2 739,80	750,00	3 489,80	30 000,00	0,00
4	2 739,80	750,00	3 489,80	30 000,00	0,00
5	2 739,80	750,00	3 489,80	30 000,00	0,00
6	2 739,80	750,00	3 489,80	30 000,00	0,00
7	2 739,80	750,00	3 489,80	30 000,00	0,00
8	2 739,80	750,00	3 489,80	30 000,00	0,00
9	2 739,80	750,00	3 489,80	30 000,00	0,00
10	2 739,80	750,00	3 489,80	0,00	30 000,00
Total	27 398,00	7 500,00	64 898,00	-	-

REFERÊNCIAS

ASSAF NETO, Alexandre. **Matemática financeira e suas aplicações**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2000.

AYRES Jr., Frank. **Matemática financeira**. São Paulo: Mcgraw-Hill do Brasil, 1981. Coleção Schaum.

BELO, Haroldo da Costa. **Matemática financeira.** Volume I. Rio de Janeiro: Fundação CEDERJ, 2008.

BORNATTO, Gilmar. **Matemática financeira**. Material de Apoio para o Curso de Administração da Business & Marketing School Faculdade Internacional.

HAZZAN, Samuel; POMPEO, José Nicolau. **Matemática financeira**. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2007.

VIANNA, Renata de Moura Issa. **Matemática financeira /** Renata de Moura Issa Vianna. - Salvador: UFBA, Faculdade de Ciências Contábeis; Superintendência de Educação a Distância, 2018.

VIEIRA SOBRINHO, José Dutra. **Matemática financeira**. 7. ed. São Paulo: Atlas, 2006.

Webnode. 2011. Matemática Financeira, **Equivalência de Capitais a Juros Simples**. Disponível em: encurtador.com.br/isNY6. Acesso em: 15 ago. 2022.

BRASIL. **Matriz de referência ENEM**. Disponível em: encurtador.com.br/gorvY. Acesso em: 15 ago. 2022.

Gov.br. **Provas e Gabaritos.** 2021. Disponível em: encurtador.com.br/gpFS0. Acesso em: 15 ago. 2022.